

# Récréations mathématiques

## La suite de Fibonacci

Université du Sud Toulon–Var

Nils Berglund

Novembre 2005

### 1 Des lapins au nombre d'or

#### 1.1 Lapins, récurrence et dominos

La suite de Fibonacci débute de la manière suivante:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots \quad (1)$$

Elle est caractérisée par le fait que chaque nombre à partir du troisième est la somme des deux précédents. Cette suite a été introduite par Léonard de Pise (surnommé Fibonacci), qui a vécu approximativement de 1170 à 1250. Léonard de Pise était un mathématicien connu en son temps, auteur de plusieurs livres de géométrie et d'arithmétique.

La suite qui porte son nom est sensée décrire l'évolution d'une population de lapins, suivant les règles très simplifiées suivantes: En une génération,

- un couple de jeune lapins devient adulte;
- un couple d'adultes donne naissance à un couple de jeunes (et ne meurt jamais).

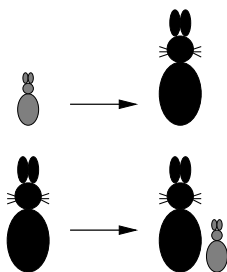


Figure 1: Règles de substitution d'une génération de lapins à la suivante.

Soit alors  $A_n$  le nombre d'adultes,  $J_n$  le nombre de jeunes couples à la  $n$ -ième génération, partant de  $J_1 = 1$ ,  $A_1 = 0$ . Les règles de substitution de la figure Fig. 1 donnent

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + J_n, \\ J_{n+1} &= A_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Soit  $F_n = A_n + J_n$  le nombre total de lapins à la  $n$ -ième génération. On voit que  $F_n = A_{n+1}$ , et pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= A_{n+1} + J_{n+1}, \\ &= A_{n+1} + A_n, \\ &= F_n + F_{n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

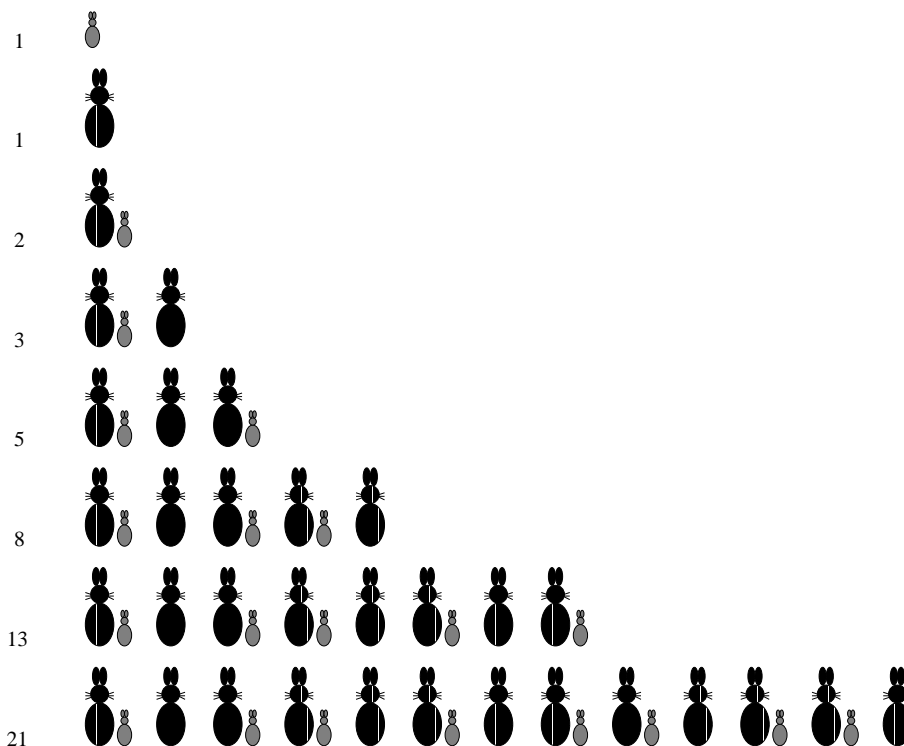


Figure 2: Évolution de la population de lapins.

Nous pouvons donc définir la suite de Fibonacci de la manière suivante.

**Définition 1.1.** La suite de Fibonacci est la suite  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  telle que  $F_1 = F_2 = 1$  et

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (4)$$

pour tout  $n \geq 2$ .

La Figure 2 illustre l'évolution de la population de lapins pendant les huit premières générations.

La suite de Fibonacci n'apparaît pas que dans l'évolution de populations. Considérons par exemple le problème de combinatoire suivant:

**Problème 1.2.** On appellera domino un rectangle de taille  $2 \times 1$ . Combien y a-t-il de manières de placer  $n$  dominos sur un échiquier de taille  $2 \times n$ ?

Dénotons ce nombre par  $N(n)$ . Par inspection (Fig. 3), on voit que  $N(1) = 1$ ,  $N(2) = 2$ ,  $N(3) = 3$ ,  $N(4) = 5$ ,  $N(5) = 8$ . Il semblerait donc que  $N(n) = F_{n+1}$ . C'est effectivement le cas, et on peut le montrer de la manière suivante:

- si le premier domino est placé verticalement, dans le coin supérieur gauche, il reste  $N(n - 1)$  manières de placer les autres dans le rectangle restant, de taille  $2 \times (n - 1)$ ;
- si le premier domino est placé horizontalement, dans le coin supérieur gauche, le second doit obligatoirement être placé juste en-dessous, et il reste alors  $N(n - 2)$  manières de placer les autres dans le rectangle restant, de taille  $2 \times (n - 2)$ .

On en déduit que

$$N(n) = N(n - 1) + N(n - 2), \quad (5)$$

qui est la même relation de récurrence que pour les  $F_n$ . Comme  $N(1) = F_2$  et  $N(2) = F_3$ , il suit que  $N(n) = F_{n+1}$ .

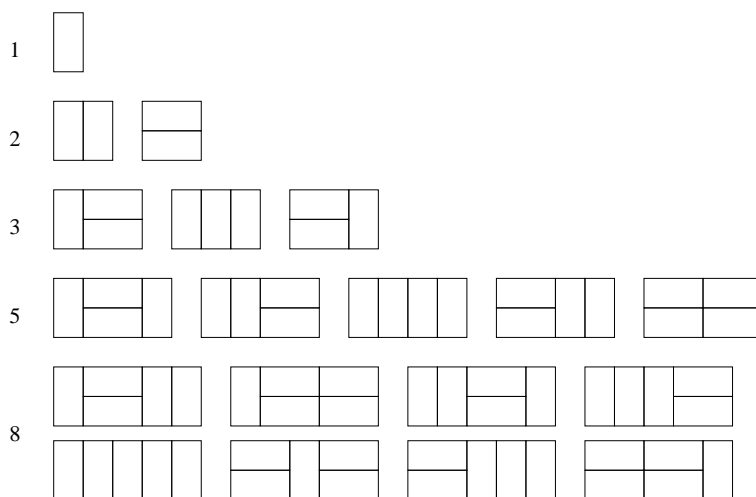


Figure 3: Arrangements de dominos.

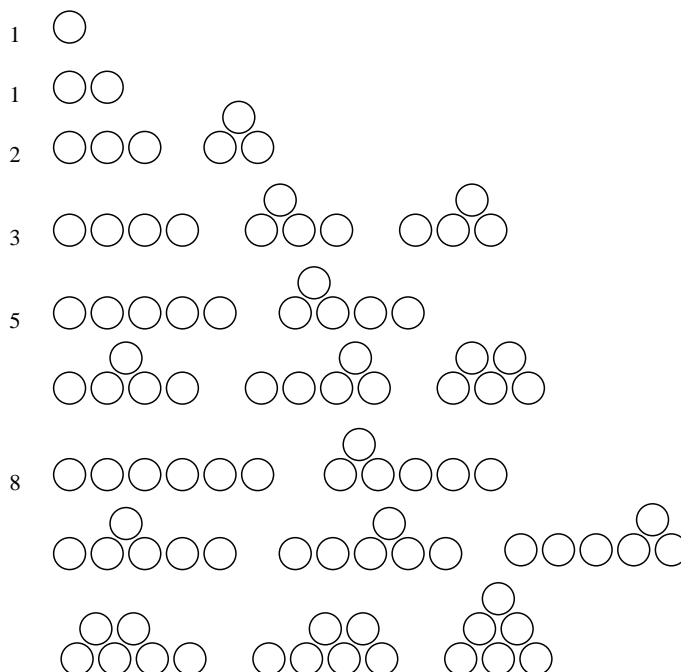


Figure 4: Arrangements de pièces.

Il existe beaucoup d'autres problèmes de combinatoire donnant lieu à la suite de Fibonacci. D'autres ne la donnent qu'en apparence, en voici un exemple.

**Problème 1.3.** *Quel est le nombre  $N(n)$  de manières de disposer  $n$  pièces de monnaie, par rangées connexes, de telle manière que chaque pièce touche deux pièces de la rangée inférieure?*

Les premières valeurs de  $n$  semblent indiquer que  $N(n) = F_n$  (Fig. 4). Cependant, cette conjecture est fautive, puisque pour  $n = 7$ , il s'avère y avoir 12 et non pas 13 arrangements possibles.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ceci montre que les test de "quotient intellectuel", fréquents dans certains magazines, demandant d'étendre de manière logique la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... en disent plus long sur l'intelligence de leur concepteur que sur celle du lecteur.

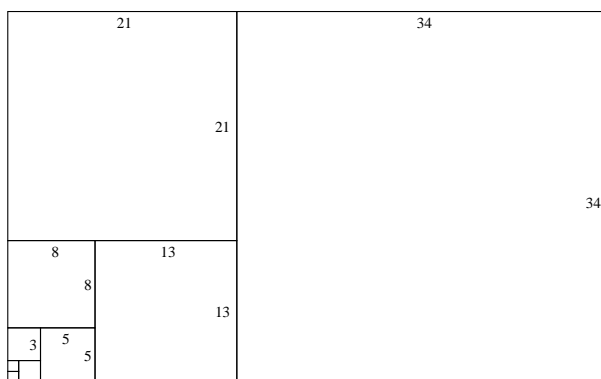


Figure 5: Puzzle de Fibonacci.

## 1.2 Puzzles et nombre d'or

La suite de Fibonacci possède beaucoup de propriétés remarquables. On observe par exemple que

$$\begin{aligned} 1^2 - 1 \cdot 2 &= -1, \\ 2^2 - 1 \cdot 3 &= 1, \\ 3^2 - 2 \cdot 5 &= -1, \\ 5^2 - 3 \cdot 8 &= 1. \end{aligned}$$

Il semble donc que le carré d'un nombre de Fibonacci diffère toujours d'une unité du produit de ses voisins. Cela est-il vrai de manière générale? On peut effectivement le prouver par récurrence.

**Proposition 1.4.** *Pour tout  $n \geq 2$ , on a*

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}. \quad (6)$$

DÉMONSTRATION: C'est vrai pour  $n = 2$ . Supposons alors la relation vraie pour  $n$ , et vérifions-la pour  $n + 1$ . On a

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} &= F_{n+1}^2 - F_n(F_{n+1} + F_n), \\ &= F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2, \\ &= F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^{n+1}, \\ &= F_{n+1} \underbrace{(F_{n+1} - F_n - F_{n-1})}_{=0} + (-1)^{n+2}, \end{aligned} \quad (7)$$

et la récurrence est démontrée. □

Les nombres de Fibonacci permettent également de jouer au puzzle.

**Problème 1.5.** *On se donne des carrés de taille  $F_n \times F_n$  pour chaque nombre de Fibonacci. Arranger successivement les carrés de manière à former, à chaque étape, un rectangle.*

La Figure 5 montre une solution possible de ce problème (il y en a d'autres).

On peut se poser la question suivante (cf. Fig. 6): La diagonale de chaque rectangle passe-t-elle par les sommets des carrés?

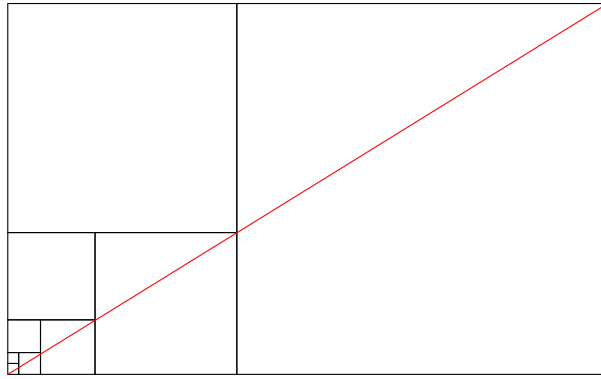


Figure 6: La diagonale passe-t-elle par les sommets des carrés?

En fait, la pente de chaque diagonale est donnée par le rapport

$$r_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} \tag{8}$$

(ou son inverse), et ses première valeurs sont données par

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{1}{1} = 1 \\
 r_2 &= \frac{1}{2} = 0.5 \\
 r_3 &= \frac{2}{3} = 0.6666666666666666 \dots \\
 r_4 &= \frac{3}{5} = 0.6 \\
 r_5 &= \frac{5}{8} = 0.625 \\
 r_6 &= \frac{8}{13} = 0.6153846153846153846 \dots \\
 r_7 &= \frac{13}{21} = 0.6190476190476190476 \dots \\
 r_8 &= \frac{21}{34} = 0.6176470588235294117 \dots \\
 r_9 &= \frac{34}{55} = 0.6181818181818181818 \dots \\
 r_{10} &= \frac{55}{89} = 0.6179775280898876404 \dots \\
 r_{11} &= \frac{89}{144} = 0.6180555555555555555 \dots \\
 r_{12} &= \frac{144}{233} = 0.6180257510729613733 \dots \\
 r_{13} &= \frac{233}{377} = 0.6180371352785145888 \dots \\
 r_{14} &= \frac{377}{610} = 0.6180327868852459016 \dots
 \end{aligned}$$

On voit que la pente  $r_n$  n'est pas constante, donc la diagonale ne passe *pas* par les sommets des carrés. Néanmoins, les  $r_n$  semblent s'approcher d'une valeur fixe, donc pour de grands rectangles, la diagonale passera près des sommets des carrés les plus grands. Deux questions se posent alors:

1. La suite des  $r_n$  tend-elle vers une limite?
2. Quelle est cette limite?

Souvent, on répond séparément à ces deux questions.

Pour prouver l'existence de la limite, on peut s'aider de la proposition suivante.

**Proposition 1.6.** *Pour tous  $a, c \in \mathbb{R}$  et  $b, d > 0$ ,*

$$\frac{a+c}{b+d} \quad \text{est compris entre} \quad \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{c}{d}. \quad (9)$$

DÉMONSTRATION: Supposons  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , c'est-à-dire  $ad < bc$ . Alors

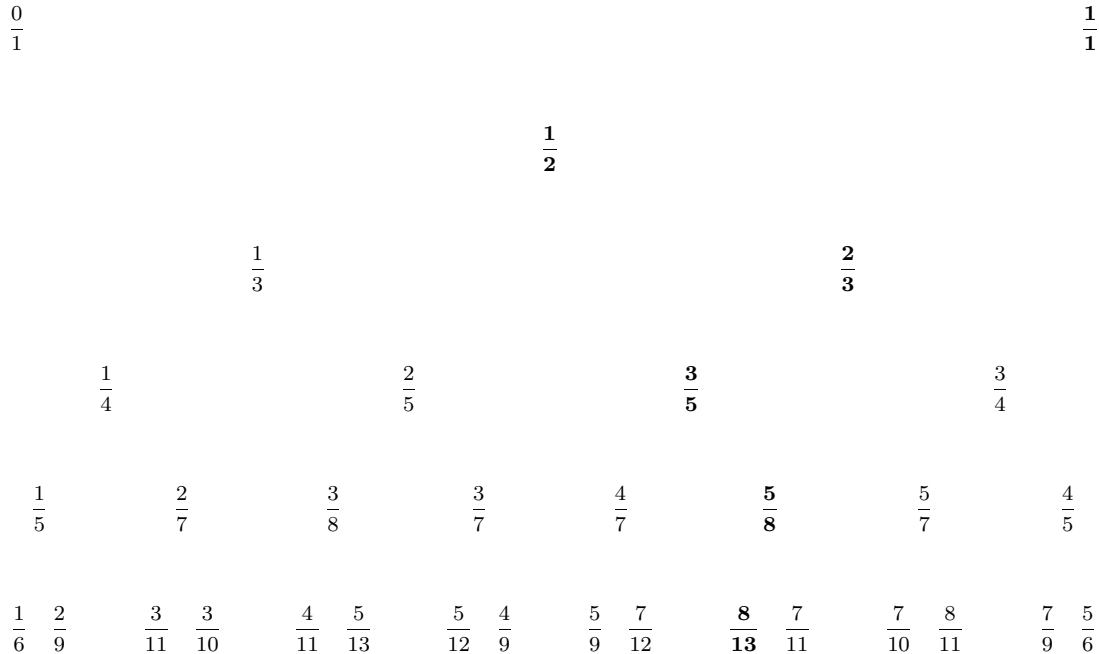
$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+cb-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0, \quad (10)$$

alors que

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)} = \frac{ad-bc}{d(b+d)} < 0, \quad (11)$$

ce qui prouve le résultat. Les cas  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  et  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  sont traités de manière similaire.  $\square$

Ce résultat permet d'énumérer les nombres rationnels contenus dans un intervalle, par exemple  $[0, 1]$ , à l'aide de *l'arbre de Farey*:



**Corollaire 1.7.** *Pour tout  $n \geq 2$ ,  $r_{n+1}$  est compris entre  $r_n$  et  $r_{n-1}$ .*

DÉMONSTRATION: Il suffit d'observer que

$$r_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_{n+1} + F_n}, \quad (12)$$

et d'appliquer la proposition.  $\square$

Les premiers  $r_n$  ont été marqués en gras dans l'arbre de Farey. On observe que

$$r_2 < r_4 < r_6 < \dots < r_5 < r_3 < r_1 . \quad (13)$$

En fait, on a

$$r_{n+1} - r_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} - \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}}{F_{n+1} F_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+2}}{F_{n+1} F_{n+2}} . \quad (14)$$

Ceci justifie, d'une part, que  $r_{n+1}$  est situé alternativement à gauche et à droite de  $r_n$ . D'autre part, comme la suite des  $F_n$  tend vers l'infini, on conclut que  $|r_{n+1} - r_n|$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Les suites de  $r_n$  pairs et impairs sont dites *adjacentes*. Par un théorème d'analyse, elles admettent une limite commune. Nous avons donc prouvé:

**Théorème 1.8.** *Il existe un nombre  $\varphi$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \varphi . \quad (15)$$

*De plus,  $\varphi > r_n$  pour tout  $n$  pair, et  $\varphi < r_n$  pour tout  $n$  impair.*

Quelle est la valeur de  $\varphi$ ? Nous allons discuter deux méthodes de le déterminer.

### Méthode analytique

Une première méthode de le calculer part de l'observation

$$r_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + F_n} = \frac{1}{1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}} = \frac{1}{1 + r_n} . \quad (16)$$

On a donc une *relation de récurrence* pour les  $r_n$ . La continuité de la fonction  $x \mapsto 1/(1+x)$  permet décrire

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + r_n} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} r_n} = \frac{1}{1 + \varphi} . \quad (17)$$

Il suit que

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0 , \quad (18)$$

et la solution positive de cette équation du second degré est donnée par

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618033988 \dots . \quad (19)$$

Son inverse, le nombre

$$\phi = \frac{1}{\varphi} = \varphi + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.618033988 \dots \quad (20)$$

est appelé le *nombre d'or*. Il satisfait l'équation du second degré

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 . \quad (21)$$

Les nombres  $\varphi$  et  $\phi$  sont irrationnels (la preuve est similaire à celle du cas bien connu de  $\sqrt{2}$ ). Une suite de nombres rationnels peut donc converger vers un nombre irrationnel (on dit que  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet, alors que  $\mathbb{R}$  est complet).

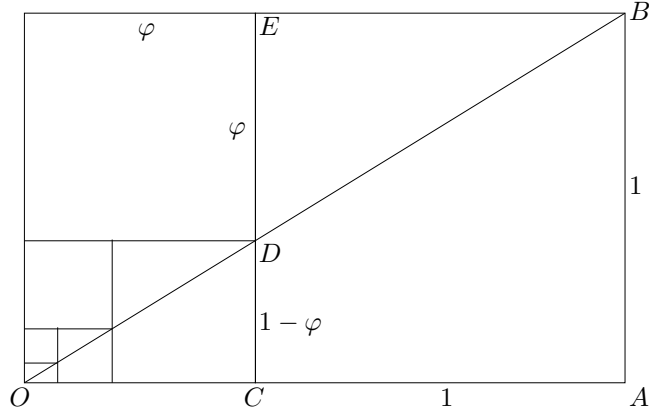


Figure 7: Construction géométrique du nombre d'or.

### Méthode géométrique

La valeur de la limite  $\varphi$  peut également être déterminée par un raisonnement géométrique. Supposons que l'on construise le puzzle de Fibonacci petit à petit, mais en diminuant à chaque étape la taille du puzzle, de telle manière que le dernier carré ait une taille unité. Comme la pente de la diagonale tend vers  $\varphi$ , dans la limite d'un grand nombre de carrés on doit tendre vers la situation dessinée dans la Figure 7: Les triangles  $OAB$ ,  $OCD$  et  $BED$  étant semblables, il suit que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+\varphi} = \frac{1-\varphi}{\varphi} = \varphi, \quad (22)$$

ce qui donne  $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ .

### 1.3 Fractions continues

Revenons un instant à la relation de récurrence

$$r_{n+1} = \frac{1}{1+r_n}, \quad (23)$$

avec  $r_1 = 1$ , satisfaite par le rapport entre nombres de Fibonacci successifs. Nous avons

$$r_n = \frac{1}{1+r_{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+r_{n-2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+r_{n-3}}}} = \dots \quad (24)$$

Ceci motive la notation suivante. Écrivons

$$[a_1] = \frac{1}{a_1}, \quad [a_1, a_2] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad (25)$$

et définissons par récurrence

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_n]}. \quad (26)$$

Nous aurons donc

$$r_n = \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{n \text{ termes}}. \quad (27)$$



Tout nombre rationnel  $x$  peut s'écrire sous la forme  $a_0 + [a_1, \dots, a_n]$ . Il suffit de poser  $x = a_0 + x_1$ , où  $a_0 = \lfloor x \rfloor$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  et  $x_1 \in [0, 1[$ . Si  $x_1 > 0$ , on écrit  $1/x_1 = a_1 + x_2$ , où  $a_1 = \lfloor 1/x_1 \rfloor$ , et ainsi de suite. On peut montrer qu'après un nombre fini  $n$  de pas, on tombera forcément sur un  $x_n$  entier.

La procédure peut aussi s'appliquer à des nombres irrationnels, mais alors elle ne s'arrête jamais. On aura par exemple

$$\varphi = [1, 1, 1, \dots] . \quad (28)$$

Un tel objet s'appelle une *fraction continue*. En voici un autre exemple: Comme  $1 < 2 < 2^2$  implique  $1 < \sqrt{2} < 2$ , dans le cas de  $x = \sqrt{2}$  on aura  $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ . Comme par ailleurs

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \dots , \quad (29)$$

on aura

$$\sqrt{2} = 1 + [2, 2, 2, \dots] . \quad (30)$$

C'est pour cette raison que  $\sqrt{2} - 1$  est parfois appelé le *nombre d'argent*.

Les nombres rationnels  $a_0 + [a_1, a_2, \dots, a_n]$  s'appellent les *convergents* de  $x$ . Par exemple, les  $r_n$  sont les convergents de  $\varphi$ . Dans un sens, ces convergents permettent de trouver les meilleures approximations possibles d'un irrationnel par des rationnels. Quels sont les convergents de  $\sqrt{2} - 1$ ? Ils sont de la forme

$$y_n = \underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_{n \text{ termes}} , \quad (31)$$

et satisfont donc la relation de récurrence

$$y_{n+1} = \underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_{n+1 \text{ termes}} = \frac{1}{2 + \underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_{n \text{ termes}}} = \frac{1}{2 + y_n} . \quad (32)$$

Comme  $y_1 = \frac{1}{2}$ , on voit que les premiers convergents valent

$$y_2 = \frac{2}{5} , \quad y_3 = \frac{5}{12} , \quad y_4 = \frac{12}{29} , \quad y_5 = \frac{29}{70} , \dots . \quad (33)$$

On voit apparaître la suite

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots \quad (34)$$

qui satisfait la relation de récurrence

$$G_{n+1} = 2G_n + G_{n-1} . \quad (35)$$

En effet, si l'on pose  $y_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}$ , la relation (32) donne

$$\frac{G_{n+1}}{G_{n+2}} = \frac{1}{2 + \frac{G_n}{G_{n+1}}} = \frac{G_{n+1}}{2G_{n+1} + G_n} , \quad (36)$$

qui équivaut à (35). De manière générale, toute suite de la forme

$$X_{n+1} = aX_n + bX_{n-1} \quad (37)$$

est telle que les rapports  $X_n/X_{n+1}$  soient les convergents d'un certain nombre réel, solution d'une équation du second degré.

Calculons encore le développement en fractions continues de  $\pi$ :

$$\begin{aligned}
 \pi &= 3.14159265\dots \\
 &= 3 + 0.14159265\dots \\
 &= 3 + \frac{1}{7.0625133\dots} \\
 &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15.99659}} \\
 &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1.00341\dots}}} \\
 &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292.63\dots}}}}, \tag{38}
 \end{aligned}$$

(39)

et par conséquent

$$\pi = 3 + [7, 15, 1, 292, \dots]. \tag{40}$$

Les premiers convergents sont donnés par

$$\begin{aligned}
 3 + [7] &= \frac{22}{7} = 3.142857\dots, \\
 3 + [7, 15] &= \frac{333}{106} = 3.141509\dots, \\
 3 + [7, 15, 1] &= \frac{355}{113} = 3.1415929\dots. \tag{41}
 \end{aligned}$$

Les meilleures approximations sont obtenues lorsque le premier terme négligé est grand, comme ici le terme 292. La convergence est la plus lente dans le cas du nombre d'or, puisque tous les termes sont égaux à 1.

## 2 Du nombre d'or aux tournesols

La *phyllotaxie* étudie les propriétés géométriques des végétaux, par exemple la disposition régulière des fleurs, des feuilles ou des pétales. Souvent, ces éléments sont disposés selon des arrangements en spirales, appelées *parastichies*, et le nombre de spirales est fréquemment un nombre de Fibonacci (Fig. 8). On pourrait penser qu'il s'agit là de coïncidences. En fait, il semble que ce ne soit pas le cas, et que les nombres de Fibonacci apparaissent de manière naturelle dans le processus de croissance.

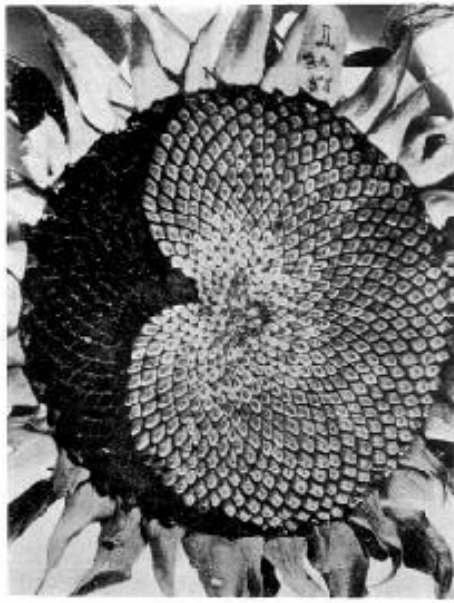


Figure 8: Les graines de cette fleur de tournesol sont disposées en spirales, au nombre de 34 dans un sens, et de 55 dans l'autre.

Les modèles morphogénétiques essaient d'expliquer ces phénomènes par des mécanismes de croissance. Le mathématicien Alan Turing a été l'un des premiers à en étudier. Sans entrer dans les détails, nous allons donner ici quelques idées de base de tels modèles.

Une fleur de tournesol pousse de l'intérieur vers l'extérieur. Les nouvelles cellules apparaissent successivement sur un bord circulaire situé au milieu de la fleur, appelé anneau apical. La plupart des cellules serviront de support aux graines, mais de temps en temps, une cellule se différencie pour donner une graine (en fait, d'abord une fleur qui se transformera plus tard en graine). Il n'est pas avantageux que les cellules différenciées apparaissent trop près l'une de l'autre, aussi peut-on supposer que chaque cellule différenciée émet une substance chimique inhibitrice, qui dissuade ses voisines de se différencier. Au bout d'un certain temps, l'effet de cette substance se dissipe et une nouvelle cellule peut se différencier.

La Figure 9 indique l'ordre d'apparition des premières cellules différenciées. Un des algorithmes proposés pour déterminer cet ordre d'apparition est le suivant: Après les trois premières cellules, on place

- la cellule 4 entre la cellule 1 et sa voisine la plus ancienne, à savoir 2;
- la cellule 5 entre la cellule 2 et sa voisine la plus ancienne, à savoir 0.

A chaque fois que la cellule 0 est une voisine, on recommence à partir de la cellule 1, donc on place

- la cellule 6 entre la cellule 1 et sa voisine la plus ancienne, à savoir 3;
- la cellule 7 entre la cellule 2 et sa voisine la plus ancienne, à savoir 4;

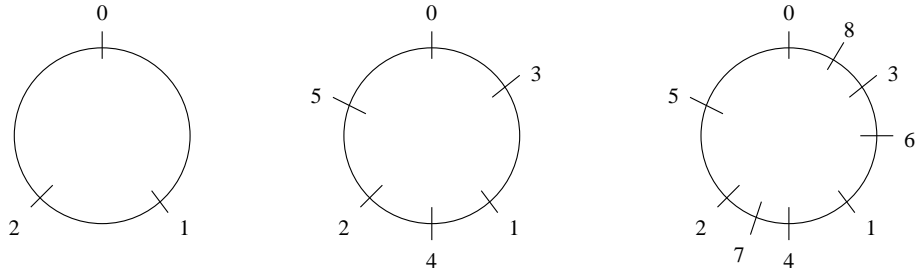


Figure 9: Ordre d'apparition des cellules différenciées lors de la croissance.

- la cellule 8 entre la cellule 3 et sa voisine la plus ancienne, à savoir 0.

On recommence à nouveau à partir de la cellule 1, et ainsi de suite. Voici la suite des dispositions des cellules, pour les 15 premiers pas:

2 :	0	1	0													
3 :	0	1	2	0												
4 :	0	3	1	2	0											
5 :	0	3	1	4	2	0										
6 :	0	3	1	4	2	5	0									
7 :	0	3	6	1	4	2	5	0								
8 :	0	3	6	1	4	7	2	5	0							
9 :	0	8	3	6	1	4	7	2	5	0						
10 :	0	8	3	6	1	9	4	7	2	5	0					
11 :	0	8	3	6	1	9	4	7	2	10	5	0				
12 :	0	8	3	11	6	1	9	4	7	2	10	5	0			
13 :	0	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5	0		
14 :	0	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5	13	0	
15 :	0	8	3	11	6	14	1	9	4	12	7	2	10	5	13	0

La Figure 10 représente verticalement la distance des cellules au bord de la fleur, le bord étant situé au bas de la figure, et les dernières cellules apparaissant en haut de la figure. On se rend compte que les cellules différenciées sont arrangées approximativement selon un réseau régulier, formé d'un certain nombre de lignes obliques. Il y a par exemple

- 3 lignes formant un angle d'environ  $45^\circ$  avec l'horizontale (il faut considérer la direction horizontale comme périodique, donc ces lignes s'enroulent autour de la figure);
- 5 lignes formant un angle d'environ  $120^\circ$  avec l'horizontale;
- 8 lignes formant un angle d'environ  $80^\circ$  avec l'horizontale;

Et ainsi de suite: on retrouve des nombre de Fibonacci. Lorsque l'on reporte ces lignes sur un diagramme circulaire, plus proche de la fleur de tournesol, elles se transforment en spirales (Fig. 11).

Le clé de la compréhension de l'apparition de la suite de Fibonacci se trouve dans la suite des permutations ci-dessus. Pour chaque ligne, on peut déterminer la suite des différences entre numéros successifs. Par exemple pour la ligne 5, on a:

$$+3, -2, +3, -2, -2.$$

Pour la ligne 8, on a:

$$+3, +3, -5, +3, +3, -5, +3, -5.$$

Pour la ligne 12, on a:

$$+8, -5, +8, -5, -5, +8, -5, +3, -5, +8, -5, -5.$$

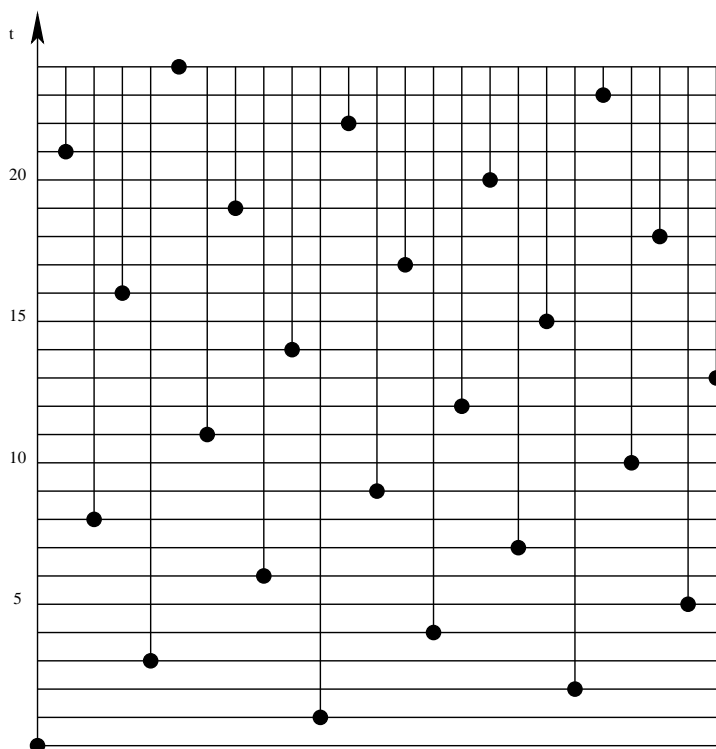


Figure 10: Disposition des cellules différenciées.

Ou encore pour la ligne 15:

$$+8, -5, +8, -5, +8, -13, +8, -5, +8, -5, -5, +8, -5, +8, -13.$$

On observe que

- chaque suite de différences ne contient que deux ou trois nombres différents;
- ces nombres sont des nombres de Fibonacci (au signe près).

Ces propriétés ne sont pas très difficiles à montrer, et utilisent principalement le fait que la somme et la différence de deux nombres de Fibonacci voisins est encore un nombre de Fibonacci.

Quel est le rapport avec les spirales? Les différences calculées ci-dessus représentent les pentes de segments obtenus en reliant deux cellules voisines sur le cercle. Les pentes des segments reliant des cellules distantes de deux, trois ou plus d'unités, étant des sommes et différences de nombres de Fibonacci, sont à nouveau de tels nombres. Les cellules se trouvent donc, à une unité près, sur des droites de pente 3, 5, 8, 13, ... Comme la figure est carrée, il en est de même du nombre de diagonales de même pente.

On peut également faire l'observation suivante: La distance angulaire entre deux cellules successives, par exemple 0 et 1, rapportée au nombre total de cellules, oscille autour du rapport de deux nombres de Fibonacci  $F_n$  et  $F_{n+2}$ : Ce rapport vaut  $\frac{1}{3}$  dans la ligne 3,  $\frac{2}{5}$  dans la ligne 5,  $\frac{3}{8}$  dans la ligne 8,  $\frac{5}{13}$  dans la ligne 13. En fait ce rapport converge vers

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1} + F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{1 + \phi} = \frac{1}{\phi^2}. \quad (42)$$

On observe souvent que l'angle entre feuilles successives apparaissant sur une branche est donné par  $360^\circ/\phi^2 \simeq 137.5^\circ$ , appelé l'angle d'or.

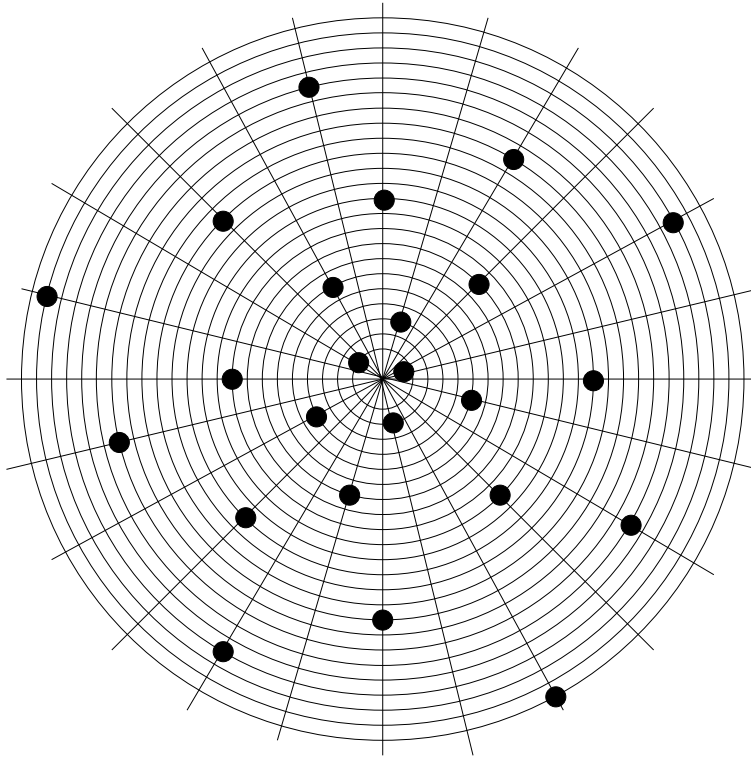


Figure 11: La figure précédente en géométrie polaire.

### Pour en savoir plus

- Au sujet des découvertes de Léonard de Pise:  
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html>
- Sur les propriétés de la suite de Fibonacci:  
<http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>  
<http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=A000045>
- Des images de phyllotaxie de Fibonacci:  
<http://maven.smith.edu/~phyllo/>
- Quelques modèles mathématiques de phyllotaxie de Fibonacci:
  - Levitov, L. S., *Phyllotaxis of flux lattices in layered superconductors*, Phys. Rev. Lett. **66** 224–227 (1991).
  - Douady S. et Couder Y., *Phyllotaxis as a physical self-organized growth process*, Phys. Rev. Lett. **68** 2098–2101 (1992).
  - Kunz, M. et Rothen F., *Phyllotaxis or the properties of spiral lattices. III. An algebraic model of morphogenesis*, J. Phys. I France **2** 2131–2101 (1992).

Nils Berglund  
 PHYMAT, UNIVERSITÉ DU SUD TOULON-VAR  
 et  
 CPT-CNRS LUMINY  
 Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France  
 E-mail: [berglund@univ-tln.fr](mailto:berglund@univ-tln.fr)  
<http://berglund.univ-tln.fr>