Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 18 décembre 2023

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème 1 (8 points)

On considère une marche aléatoire symétrique sur $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$, avec conditions au bord absorbantes, c'est-à-dire que dès que la marche atteint l'un des états 0 ou N, elle y reste indéfiniment. Soit

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\}$$

le temps d'absorption. Par convention, $\tau = 0$ si $X_0 \in \{0, N\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathcal{X}$ on pose

$$f(i, \lambda) = \mathbb{E}_i\bigl(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} 1_{\{X_\tau = N\}}\bigr) = \begin{cases} \mathbb{E}_i\bigl(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\bigr) & \text{si } X_\tau = N \;, \\ 0 & \text{sinon} \;. \end{cases}$$

1. Que valent $f(0, \lambda)$ et $f(N, \lambda)$?
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$\mathbb{P}_i\{\tau = n\} = \frac{1}{2}\bigl[\mathbb{P}_{i-1}\{\tau = n-1\} + \mathbb{P}_{i+1}\{\tau = n-1\}\bigr] \;.$$
3. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$f(i, \lambda) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\bigl[f(i-1, \lambda) + f(i+1, \lambda)\bigr] \;.$$
4. Trouver une relation entre c et λ telle que l'équation ci-dessus pour f admette des solutions de la forme $f(i, \lambda) = \mathrm{e}^{ci}$. Montrer à l'aide d'un développement limité que
$$c^2 = 2\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \;.$$
5. Déterminer des constantes a et b telles que
$$\mathbb{E}_i\bigl(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} 1_{\{X_\tau = N\}}\bigr) = a\,\mathrm{e}^{ci} + b\,\mathrm{e}^{-ci} \;.$$
6. Effectuer un développement limité au premier ordre en λ de l'égalité ci-dessus. En déduire
$$\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} \;.$$
7. Calculer
$$\mathbb{E}_i\bigl(\tau 1_{\{X_\tau = N\}}\bigr) \;.$$

On rappelle les développements limités suivants:

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \;,$$
$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \;.$$

Problème 2 (8 points)

Pour $x \in \mathbb{N}$, on dénote par

$$\lfloor x \rfloor = \max\{y \in \mathbb{N} : y \leqslant x\}$$

la partie entière de x.

Soit $p \in [0,1]$. On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ de probabilités de transition

$$p_{xy} = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \;, \\ 1-p & \text{si } y = \lfloor x/2 \rfloor \;, \\ 0 & \text{sinon} \;. \end{cases}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $V(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

1. Pour quelles valeurs de α la fonction V est-elle une fonction de Lyapounov ? On dira que ces valeurs de α sont *admissibles.*
2. Calculer $(\mathcal{L}V)(x)$, où $\mathcal{L}$ est le générateur de la chaîne de Markov. On distinguera les cas x pair et x impair.
3. Pour quels p la chaîne est-elle à croissance sous-exponentielle ?
4. Déterminer une fonction $f_p(\alpha)$ telle que
$$(\mathcal{L}V)(x) \leqslant -f_p(\alpha)V(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$.
5. Étudier la fonction $\alpha \mapsto f_p(\alpha)$ pour les valeurs de α admissibles : comportement aux bords du domaine, croissance/décroissance, convexité.
6. Pour quelles valeurs de p existe-t-il un α admissible tel que $f_p(\alpha) > 0$?
7. Pour quelles valeurs de p peut-on affirmer l'existence d'une unique mesure invariante π telle que la loi de X_n converge exponentiellement vite vers π ?

Problème 3 (8 points)

On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$ donnée par

$$X_{n+1} = aX_n + Y_{n+1}$$

avec $a \in [0,\infty[$, les Y_n étant indépendantes, identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner les probabilités de transition $p(x,y)$ de la chaîne.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^\infty x^k\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ pour $k \in \{0,1\}$.
3. Soit la fonction de Lyapounov $V(x) = x$. Calculer $(\mathcal{L}V)(x)$.
4. Pour quelles valeurs de a la chaîne est-elle à croissance sous-exponentielle ?
5. À l'aide de la formule de Dynkin, calculer l'espérance de X_n lorsque $a = 1$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?
6. Pour quelles valeurs de a la chaîne satisfait-elle une condition de dérive géométrique ? Quels en sont les paramètres ?
7. Lorsque la condition de dérive géométrique est satisfaite, trouver $\alpha \in]0,1[$ et une mesure ν tels que la condition de minoration soit satisfaite. Que peut-on en déduire ?