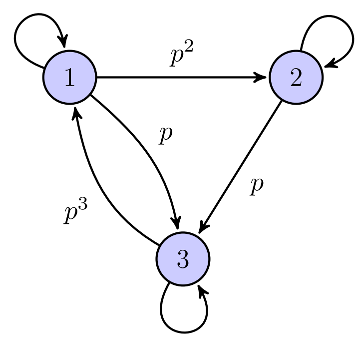
Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 12 décembre 2022

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ définie partiellement par le graphe ci-dessous (toutes les transitions possibles sont indiquées par des flèches).



1. Compléter le graphe et donner la matrice de transition P de la chaîne.
2. Trouver $p_{\max} > 0$ tel que que le P soit une matrice stochastique si et seulement si $p \in [0, p_{\max}]$.
3. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible ? Régulière ?
4. Déterminer la distribution stationnaire π de la chaîne, lorsque celle-ci est unique. Calculer sa limite lorsque p tend vers 0.

Exercice 2 (4 points)

Des voyageurs arrivent au contrôle de sécurité d'un aéroport selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ, mesurée en voyageurs par minute.

1. Quel est le nombre moyen de voyageurs arrivés durant la première minute ?
2. Sachant que 3 voyageurs sont arrivés dans la première minute, quelle est la probabilité que 2 voyageurs soient arrivés dans les 30 premières secondes ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que n voyageurs sont arrivés dans la première minute, quelle est la probabilité que k voyageurs soient arrivés dans les 30 premières secondes ?

4. Soit $p \in]0,1[$. Sachant que n voyageurs sont arrivés dans la première minute, quelle est la probabilité que k voyageurs soient arrivés dans la première fraction p de la minute (c'est-à-dire dans l'intervalle de temps compris entre 0 et la seconde $60 \cdot p$) ? À quelle loi de probabilité cela correspond-il ?

Exercice 3 (4 points)

On reprend la situation du contrôle de sécurité dans un aéroport. On suppose que les voyageurs arrivent selon un processus ponctuel de Poisson, d'intensité 1.5 clients par minute. On suppose également que chaque voyageur est contrôlé pendant un temps de loi exponentielle, d'espérance 1 minute. Ces temps sont indépendants, et indépendants du processus de Poisson.

On voudrait comparer deux situations.

1. Un seul scanner est ouvert, que les voyageurs doivent passer l'un après l'autre.
2. Il y a deux scanners ouverts. Les voyageurs forment une seule file, et se dirigent vers le premier scanner libre.

Dans chacun des deux cas, répondre aux questions suivantes.

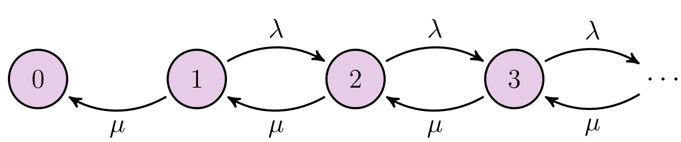
1. Modéliser la situation par un processus de sauts markovien (de type file d'attente) et donner son graphe et son générateur.
2. Le processus admet-il une distribution stationnaire ? Si oui, la calculer.
3. Calculer, si possible, le temps d'attente moyen par voyageur.

Problème (8 points)

On considère un processus de sauts markovien sur $\mathbb{N}$, dont les taux de transition non nuls sont donnés par

$$\begin{aligned} q(n,n+1) &= \lambda \qquad \text{si } n \geqslant 1 , \\ q(n,n-1) &= \mu \qquad \text{si } n \geqslant 1 , \end{aligned}$$

où $\lambda, \mu > 0$.



Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h(n) = \mathbb{P}_n\{\tau_0 < \infty\}$, où $\tau_0 = \inf\{t > 0 \colon X_t = 0\}$.

1. Que vaut $h(0)$?
2. Justifier le fait que

$$\mathbb{P}_n\{X_t = m\} = \mathbb{P}\{X_t = m | X_0 = n\} = \mathcal{O}(t)$$

lorsque $t \to 0$, pour tous n, m tels que $|n - m| \geqslant 2$.

3. Montrer que

$$\mathbb{P}_n\{X_t = n+1\} = \lambda t + \mathcal{O}(t)$$
$$\mathbb{P}_n\{X_t = n-1\} = \mu t + \mathcal{O}(t)$$

   lorsque $t \to 0$, pour tout $n \geqslant 1$.

4. En déduire que

$$\lambda h(n+1) - (\lambda+\mu)h(n) + \mu h(n-1) = 0$$

   pour tout $n \geqslant 1$.

5. Chercher des solutions de la forme $h(n) = ac^n$ pour $a, c \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution si $\lambda \leqslant \mu$, et deux solutions possibles si $\lambda > \mu$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$, on pose

$$f(n,t) = \mathbb{P}_n\{\tau_0 \geqslant t\}$$

   Que vaut $f(0,t)$?

7. En s'inspirant du point 4, exprimer

$$\frac{\partial f}{\partial t}(n,t)$$

   en fonction de $f(n-1,t)$, $f(n,t)$ et $f(n+1,t)$.

8. Écrire la solution de cette équation en fonction de $P_t = \mathrm{e}^{tL}$ (on ne demande pas de calculer P_t).