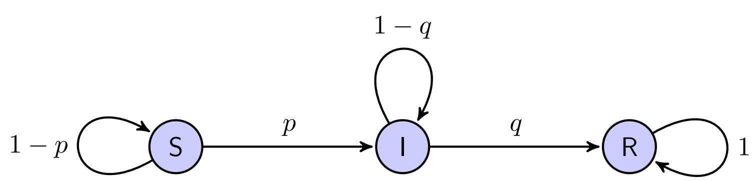
Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 15 décembre 2021

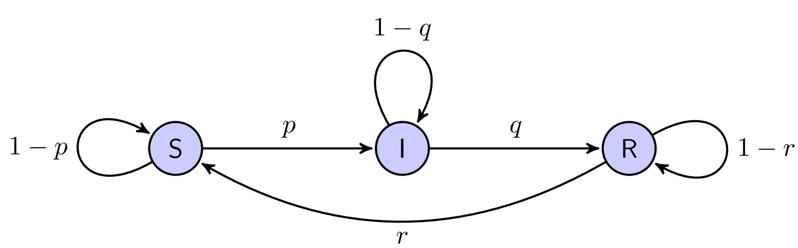
Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

On considère le modèle simple suivant pour la propagation d'une épidémie. Il y a trois états, dénotés S, I, et R, correspondant au fait d'être Susceptible d'attraper la maladie, Infectieux, ou Remis.



1. Selon les valeurs de $p, q \in [0, 1]$, de quel type de chaîne s'agit-il ?
2. Si un individu est initialement susceptible, déterminer l'espérance du temps jusqu'à ce qu'il soit remis.
3. On considère maintenant une variante du modèle, dans laquelle un individu remis peut à nouveau devenir susceptible.



   Pour quelles valeurs de $p, q, r \in [0, 1]$ la chaîne est-elle irréductible ?

4. On suppose la chaîne irréductible. Déterminer les probabilités, asymptotiquement lorsque le temps tend vers l'infini, d'être infecté ou remis.
   Appliquer le résultat au cas $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{10}$.

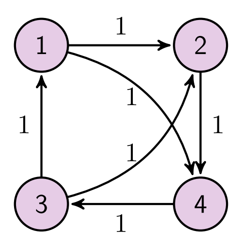
Exercice 2 (4 points)

Des voyageurs sur le point de partir en vacances arrivent au guichet d'une gare selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ.

1. Quel est le nombre moyen de clients arrivés durant la première heure ?
2. Sachant que 3 clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que 2 clients soient arrivés dans la première demi-heure ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que n clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que k clients soient arrivés dans la première demi-heure ?
4. Soit $p \in]0,1[$. Sachant que n clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que k clients soient arrivés dans la première fraction p de l'heure (c'est-à-dire dans l'intervalle de temps compris entre 0 et la minute $60 \cdot p$) ? À quelle loi de probabilité cela correspond-il ?

Exercice 3 (4 points)

On considère un processus de sauts markovien X_t sur $\mathcal{X} = \{1,2,3,4\}$ de graphe



1. Donner le générateur du processus.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Ce processus est-il réversible?
4. Combien de fois ce processus saute-il en moyenne de 1 vers 4 par unité de temps, s'il est dans son état stationnaire?

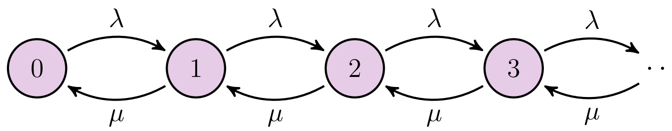
Problème (8 points)

Afin d'obtenir un modèle plus réaliste de l'évolution d'une épidémie, on va introduire différents processus de sauts markoviens.

Dans un premier temps, on considère un processus de sauts sur $\mathbb{N}$, dans lequel X_t représente le nombre d'individus infectés au temps t. Ses taux de transition sont donnés par

$$\begin{aligned} q(n, n+1) &= \lambda \qquad \text{si } n \geqslant 0\,, \\ q(n, n-1) &= \mu \qquad \text{si } n \geqslant 1\,, \end{aligned}$$

où λ désigne le taux d'infection, et μ désigne le taux de rétablissement.



1. Sous quelle condition ce processus admet-il une distribution stationnaire ? Quel est le nombre moyen d'individus infectés lorsque le système est à l'équilibre ?
2. Écrire l'équation de Kolmogorov progressive pour $P_t(0, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On ne demande pas de résoudre cette équation.)
3. Que se passerait-il si on changeait la définition de $q(n, n+1)$ en $q(n, n+1) = (n+1)\lambda$?
4. Pour affiner le modèle, on considère maintenant un processus de sauts sur $\mathbb{N}^2$. Ses états sont de la forme (i, r), où i désigne le nombre d'individus infectés, et r désigne le nombre d'individus remis. Les taux de transition non nuls sont

$$\begin{aligned} q\big((i,r),(i+1,r)\big) &= \lambda \;, \\ q\big((i,r),(i-1,r+1)\big) &= \mu \;. \end{aligned}$$

   Esquisser le graphe de ce processus de sauts. Quelle est l'interprétation de ces taux ?
5. Soit $x_{ir}(t) = P_t\big((0,0),(i,r)\big)$ pour $(i,r) \in \mathbb{N}^2$. Écrire les équations de Kolmogorov progressives pour $x_{ir}(t)$.
6. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit

$$y_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} x_{ir}(t) \;.$$

   Que représente $y_i(t)$? Exprimer la dérivée de $y_i(t)$ en fonction des $y_j(t)$, et comparer avec la question 2. Que peut-on en conclure ?
7. Pour $r \in \mathbb{N}$, soit

$$z_r(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{ir}(t) \;.$$

   Que représente $z_r(t)$? Exprimer la dérivée de $z_r(t)$ en fonction des $z_s(t)$, et représenter le processus de sauts associé sous forme de graphe.
8. Calculer $z_r(t)$ pour tout $t > 0$ en supposant que $z_0(0) = 1$ et $z_r(0) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$.