Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 16 décembre 2020

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Les clients arrivent dans un bureau de poste, pressés d'expédier leurs colis de Noël, selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ.

1. Quel est le nombre moyen de clients arrivés durant la première heure ?
2. Sachant que 3 clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que 2 clients soient arrivés dans la première demi-heure ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que n clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que k clients soient arrivés dans la première demi-heure ?
4. Soit $p \in]0, 1[$. Sachant que n clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que k clients soient arrivés dans la première fraction p de l'heure (c'est-à-dire dans l'intervalle de temps compris entre 0 et la minute $60 \cdot p$) ? À quelle loi de probabilité cela correspond-il ?

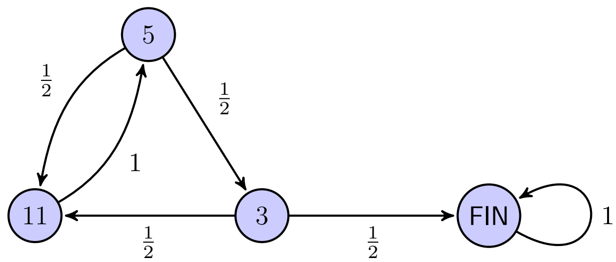
Exercice 2 (4 points)

Le four à bois d'une pizzeria permet de cuire 4 pizzas à la fois. Les clients arrivent dans la pizzeria selon un processus de Poisson d'intensité λ égale à 1 client par minute. Dès que le four ne contient plus qu'une pizza, ou plus de pizza du tout, le pizzaïolo remet immédiatement 3 pizzas dans le four. On admet qu'il ressort chaque pizza après un temps de loi exponentielle d'espérance égale à 2 minutes, indépendamment des autres pizzas et de l'arrivée des clients.

1. Expliquer pourquoi le nombre X_t de pizzas dans le four au temps t peut être décrit par un processus de sauts markovien.
2. Donner le graphe et le générateur de ce processus.
3. Calculer la distribution stationnaire du processus.
4. Dans l'état d'équilibre, quelle est la probabilité que le four soit vide ? Quel est le nombre moyen de pizzas dans le four ?

Exercice 3 (4 points)

1. Quel type de chaîne de Markov est décrit dans la bande dessinée de Pierre Monmarché sur la page ci-contre ? Justifier soigneusement votre réponse.
2. On considère la chaîne simplifiée ci-dessous, obtenue en regroupant certaines cases, et en en éliminant d'autres.



   Écrire la matrice de cette chaîne sous sa forme canonique, et calculer sa matrice fondamentale.

3. Si on commence dans la case 11, combien de fois visite-t-on en moyenne les différentes cases avant la fin de l'histoire ?
4. Partant de la case 11, quelle est la longueur moyenne de l'histoire ?

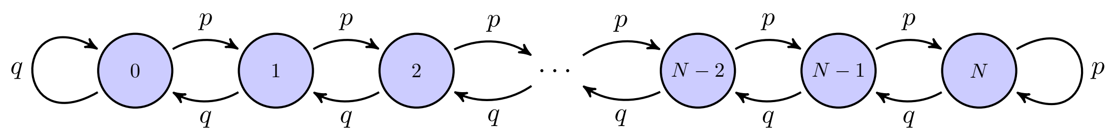
Flânerie ergodique.

Instructions : pour lire cette histoire, munissez-vous d'un dé. Après avoir lu une case, lancez le dé, et allez à la case indiquée. Exemple : ⚀ ⚃ → 9 signifie : si le dé fait 1 ou 4, continuez votre lecture par la case 9.
L'histoire est censée commencer en case 1.

FIGURE 1. Copyright : Pierre Monmarché.

Problème (8 points)

On fixe un réel $p \in [0,1]$ et on pose $q = 1-p$. On considère la chaîne de Markov sur $\{0,\dots,N\}$ dont le graphe est le suivant :



1. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible ? Quand la chaîne n'est pas irréductible, de quelle type de chaîne s'agit-il ?

   Dans la suite, on suppose que p est tel que la chaîne soit irréductible.

2. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0,N\}\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $f(i,\lambda) = \mathbb{E}_i(\mathrm{e}^{-\lambda\tau})$.
   Que valent $f(0,\lambda)$ et $f(N,\lambda)$?

3. Pour $0 < i < N$ et $n \geqslant 1$, exprimer $\mathbb{P}_i\{\tau = n\}$ en fonction de $\mathbb{P}_{i-1}\{\tau = n-1\}$ et $\mathbb{P}_{i+1}\{\tau = n-1\}$.

4. En déduire que
$$f(i,\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\big[qf(i-1,\lambda) + pf(i+1,\lambda)\big]$$
   pour $0 < i < N$.

5. Soit $g(i) = \mathbb{E}_i(\tau)$. Que valent $g(0)$ et $g(N)$?

6. Montrer que
$$g(i) = -\frac{\partial f}{\partial \lambda}(i,0)$$
   et en déduire que pour $0 < i < N$, on a
$$g(i) = qg(i-1) + pg(i+1) + 1 \tag{1}$$

7. On suppose à partir de maintenant que $p \neq q$.
   Trouver $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(i) = ci$ soit une solution particulière de (1).

8. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ l'équation homogène
$$g_0(i) = qg_0(i-1) + pg_0(i+1)$$
   admet-elle une solution de la forme $g_0(i) = x^i$? On pourra exprimer ces valeurs de x en fonction de $\rho = q/p$.
   En déduire la valeur de $\mathbb{E}_i(\tau)$ pour tout $i \in \{0,1,\dots,N\}$.