

Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 16 décembre 2019

Durée: 2 heures

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

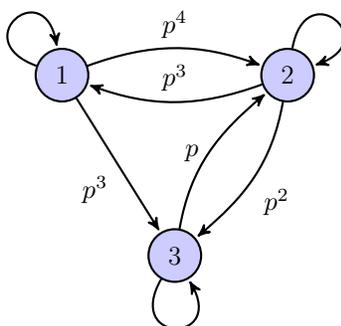
Les documents et les calculatrices sont autorisés.

Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.

Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ définie partiellement par le graphe ci-dessous (toutes les transitions possibles sont indiquées par des flèches).



1. Compléter le graphe et donner la matrice de transition P de la chaîne.
2. Montrer qu'il existe un intervalle $[0, p_{\max}]$ avec $p_{\max} > 0$ tel que le P soit une matrice stochastique si et seulement si $p \in [0, p_{\max}]$ (on ne demande pas de calculer p_{\max}).
3. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible ? Régulière ?
4. Déterminer la distribution stationnaire π de la chaîne, lorsque celle-ci est unique.

Exercice 2 (4 points)

Au cours d'un mouvement social, des passagers arrivent au service d'information des voyageurs de la gare d'Orléans selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ .

1. Sachant que 3 passagers arrivent durant la première minute, quelle est la probabilité qu'il soient tous arrivés lors des 20 premières secondes ?
2. Plus généralement, sachant que 3 passagers arrivent durant la première minute, quelle est la probabilité que k d'entre eux soient arrivés lors des 20 premières secondes ?
3. Quelle est la loi du nombre de passagers arrivés lors des 20 premières secondes, conditionnellement au fait que 3 passagers arrivent durant la première minute ?
4. Que devient cette loi (conditionnelle) si au total n passagers arrivent durant la première minute ?

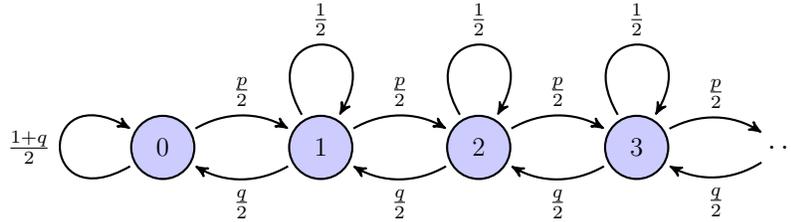
Exercice 3 (4 points)

Arthur est un nouveau-né qui passe son temps à manger, jouer ou dormir. Il mange pendant un temps de loi exponentielle d'espérance une demi-heure, joue pendant un temps de loi exponentielle d'espérance une heure, et dort pendant un temps de loi exponentielle d'espérance trois heures. Toutes ces durées sont indépendantes. Après avoir mangé, il y a une chance sur deux qu'Arthur joue, et une chance sur deux qu'il dorme. Après avoir joué, il y a une chance sur deux qu'il mange, et une chance sur deux qu'il dorme. Après avoir dormi, il se met toujours à jouer. Tous ces choix sont indépendants, et indépendants des durées des activités.

1. Expliquer pourquoi la vie d'Arthur peut être décrite par un processus de sauts markovien, et donner son générateur.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Asymptotiquement, quelle fraction du temps Arthur passe-t-il à dormir ?
4. En moyenne, combien de fois Arthur se réveille-t-il par période de 24 heures ?

Problème (8 points)

On fixe un réel $p \in [0, 1]$ et on pose $q = 1 - p$. On considère la chaîne de Markov sur \mathbb{N} dont le graphe est le suivant :



1. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible ? Quand la chaîne n'est pas irréductible, de quelle type de chaîne s'agit-il ?

Dans la suite, on suppose que p est tel que la chaîne soit irréductible.

2. La chaîne est-elle apériodique ?
3. Montrer qu'il existe un vecteur réversible $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$, et que ce vecteur est unique à un facteur multiplicatif près.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on construire une distribution stationnaire π à partir de α ? Que vaut alors π ?
5. Soit $h(i) = \mathbb{P}_i\{\tau_0 < \infty\}$, où $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Que vaut $h(0)$?
6. Trouver une relation linéaire entre $h(i)$, $h(i-1)$ et $h(i+1)$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que l'ensemble de ces relations admet une solution de la forme $h(i) = \beta^i$ pour des valeurs de β que l'on déterminera.
7. Parmi les valeurs trouvées de β , lesquelles donnent lieu à une probabilité ? Vu le résultat du point 4., qu'est-ce que cela implique en termes de récurrence positive/récurrence nulle/transience de la chaîne ?
8. Lorsqu'il n'y a qu'une valeur de β , comment justifier l'unicité de la solution trouvée ?