Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 17 décembre 2018

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Une urne contient initialement 3 boules noires et 1 boule rouge. Les boules sont indistinguables au toucher. On tire au hasard une boule.

- Si cette boule est noire, on la retire.
- Si cette boule est rouge, on la remet dans l'urne.

On répète l'opération jusqu'à ce que l'urne ne contienne plus que la boule rouge.

1. Soit X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne après n tirages. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, et donner son graphe et sa matrice de transition.
2. De quel type de chaîne (absorbante, irréductible, régulière) s'agit-il ?
3. Déterminer l'espérance du nombre de tirages jusqu'à ce que l'urne ne contienne plus que la boule rouge.

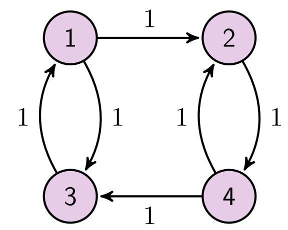
Exercice 2 (4 points)

On modélise l'arrivée de passagers dans un contrôle de sécurité d'un aéroport par un processus de Poisson d'intensité λ égale à 2 passagers toutes les 10 secondes.

1. Quel est le nombre moyen de passagers arrivés entre 12h00 et 12h01 ?
2. Soit T le temps écoulé entre l'arrivée des deux premiers passagers. Donner la loi de T et la probabilité que T soit supérieure à 10 secondes.
3. Sachant que 4 passagers sont arrivés entre 12h00 et 12h01, quelle est la probabilité que 2 passagers soient arrivés dans les 20 premières secondes ?
4. Chaque passager passe au contrôle de sécurité un temps de loi exponentielle de paramètre μ, indépendant de tous les autres aléas. Donner un condition sur μ pour que la longueur de la file d'attente ne tende pas vers l'infini.

Exercice 3 (4 points)

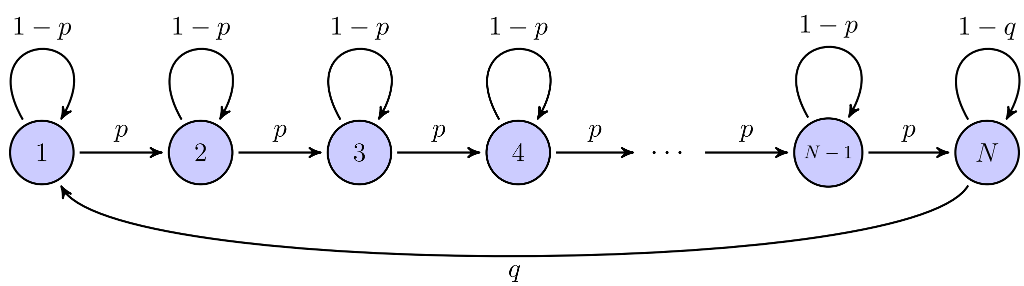
On considère un processus de sauts markovien X_t sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ de graphe



1. Donner le générateur du processus.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Ce processus est-il réversible?
4. Combien de fois ce processus saute-il en moyenne de 1 vers 3 par unité de temps, s'il est dans son état stationnaire?

Problème (8 points)

On fixe un entier $N \geqslant 2$. Étant donnés deux nombres $p, q \in [0, 1]$, on considère la chaîne de Markov sur $\{1, \ldots, N\}$ dont le graphe est le suivant :



1. Pour quelles valeurs de p et q la chaîne est-elle irréductible ? Pour quelles valeurs est-elle absorbante ?
2. On considère le cas $q = 0$ et $p > 0$. Soit $\tau = \tau_N = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n = N\}$. Montrer que
$$\mathbb{P}_i\{\tau = n\} = (1-p)\mathbb{P}_i\{\tau = n-1\} + p\mathbb{P}_{i+1}\{\tau = n-1\}$$
pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ et $n \geqslant 1$.
3. Soit $f(i) = \mathbb{E}_i(\tau)$. Que vaut $f(N)$?
4. Montrer que
$$f(i) = (1-p)f(i) + pf(i+1) + 1$$
pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, et en déduire $f(i)$ pour $i \in \{1, \ldots, N\}$.
5. On considère maintenant le cas $q = 1$ et $p > 0$. L'état 1 est-il apériodique ?
6. Calculer $\mathbb{E}_2(\tau_1)$ en utilisant le résultat du point 4. En déduire $\mathbb{E}_1(\tau_1)$.
7. En déduire la valeur $\pi(1)$ de la distribution stationnaire en 1.
8. Calculer $\pi(i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.