# Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

## Examen du 18 décembre 2017

*Durée:* 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

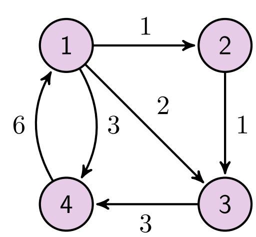
### Exercice 1 (4 points)

Deux urnes $U_1$ et $U_2$ contiennent initialement chacune une boule rouge et une boule blanche. Toutes les minutes, on tire au hasard une boule de $U_1$ et une boule de $U_2$. On place alors la boule issue de $U_1$ dans $U_2$, et la boule issue de $U_2$ dans $U_1$.

1. Soit $X_n$ le nombre de boules rouges contenues dans l'urne $U_1$ après $n$ tirages. Montrer que $X_n$ détermine le nombre de boules de chaque couleur contenues dans chaque urne.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov, et préciser son espace $\mathcal{X}$ et sa matrice de transition $P$. De quel type de chaîne (absorbante, irréductible, régulière) s'agit-il ?
3. La chaîne admet-elle une distribution stationnaire $\pi$ ? Si oui, calculer $\pi$.
4. Déterminer la probabilité asymptotique, lorsque le temps tend vers l'infini, que chaque urne contienne une boule de chaque couleur.

### Exercice 2 (4 points)

On considère un processus de sauts markovien $X_t$ sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ dont le graphe est le suivant:




1. Donner le générateur du processus.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Ce processus est-il réversible?
4. Combien de fois ce processus saute-il en moyenne de 4 vers 1 par unité de temps, s'il est dans son état stationnaire?

### Exercice 3 (4 points)

Il est midi. Dans l'un des RUs de l'Université d'Orléans, les étudiants arrivent selon un processus ponctuel de Poisson $(X_n)_{n\geqslant 0}$ d'intensité $\lambda$ égale à 10 étudiants par minute.

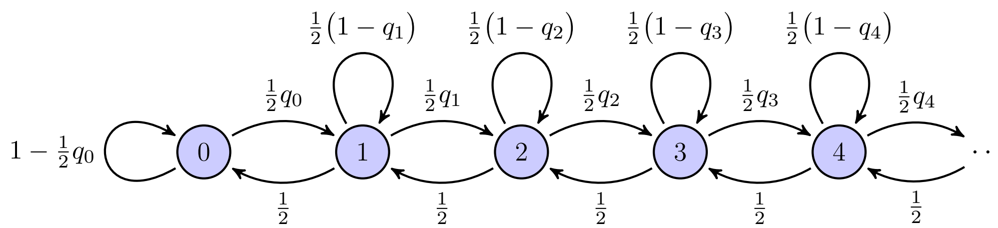
1. Quelle est la loi du nombre $N_{10}$ d'étudiants arrivant lors des 10 premières minutes ? Calculer l'espérance $\mathbb{E}(N_{10})$.

2. Sachant que 10 étudiants sont arrivés lors de la première minute, quelle est la probabilité que 3 étudiants soient arrivés lors de 30 premières secondes ?
3. Le temps passé à la caisse par chaque étudiant suit une loi exponentielle d'espérance 5 secondes. Déterminer la loi stationnaire du nombre d'étudiants dans le système.
4. Calculer la longueur moyenne de la file d'attente dans son état stationnaire, ainsi que la probabilité que la file soit vide.

**Problème (8 points)**

On se donne des nombres réels $q_0, q_1, q_2, \dots \in ]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, de probabilités de transition

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} q_i & \text{si } j = i+1 \,, \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = i-1 \,, \\ \frac{1}{2}(1-q_i) & \text{si } j = i \neq 0 \,, \\ 1 - \frac{1}{2} q_0 & \text{si } j = i = 0 \,, \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases}$$




1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. On suppose qu'il existe un vecteur réversible de la forme $\alpha = (1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$. Déterminer l'expression des composantes de $\alpha$ en fonction des $q_i$.
3. On suppose que
$$q_i = \frac{\lambda}{i+1}$$
pour un réel $\lambda > 0$. Déterminer $\alpha$ et en déduire la distribution stationnaire $\pi$.
4. On suppose que
$$q_i = \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^{\gamma}$$
pour un réel $\gamma > 0$. Sous quelle condition sur $\gamma$ existe-t-il une distribution stationnaire $\pi$ ? Donner l'expression de $\pi$ dans ce cas.
5. Pour les mêmes $q_i$ qu'au point 4., déterminer, s'il existe, le temps de récurrence moyen $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
6. On revient au cas général $q_i \in ]0,1[$. Soit $h(i) = \mathbb{P}_i\{\tau_0 < \infty\}$. Déterminer $h(0)$.
7. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,
$$h(i) = (1-r_i)h(i-1) + r_i h(i+1)$$
pour des constantes $r_i \in [0,1]$, que l'on déterminera en fonction des $q_i$.
8. Résoudre cette équation dans le cas où $q_i = q$ est indépendant de $i$.