Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 12 décembre 2016

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, machines à laver et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Lors d'une épidémie de grippe aviaire, un éleveur a fait les observations suivantes:

- 20% des poulets sains le jour n tombent malades le jour $n+1$;
- parmi les poulets malades le jour n, 40% sont encore malades le jour $n+1$, 10% meurent, 40% guérissent en devenant immunisés, et 10% guérissent mais sans devenir immunisés;
- un poulet immunisé le reste indéfiniment.

1. Montrer que ce système peut être décrit par une chaîne de Markov. De quel type de chaîne s'agit-il ?
2. Si tous les poulets sont initialement sains, déterminer la probabilité qu'un poulet meure de l'épidémie, ainsi que la durée moyenne de l'épidémie.
3. On suppose maintenant que l'éleveur vaccine une proportion p des poulets sains. Ceux-ci deviennent alors immunisés le jour suivant. Parmi les poulets restants, la proporion de ceux qui tombent malades est toujours de 20% . Déterminer la valeur de p pour que la probabilité qu'un poulet meure tombe à 5%.

Exercice 2 (4 points)

Dans une station service, des voitures arrivent selon un processus ponctuel de Poisson de taux 10 voitures par heure.

1. Quel est le temps moyen entre le passage de deux voitures consécutives ?
2. Sachant que 10 voitures sont passées entre 12h et 13h, quelle est la probabilité que 5 voitures soient passées entre 12h et 12h30 ?
3. Des camions arrivent à la station service selon un processus ponctuel de Poisson indépendant de celui des voitures, de taux 5 camions par heure. Quelle est la probabilité que k véhicules (voitures ou camions) passent entre les instants 0 et t ?
4. Quel est le temps moyen entre le passage de deux véhicules consécutifs ?

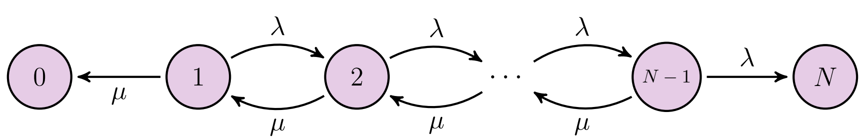
Exercice 3 (4 points)

Un petit magasin d'électroménager peut avoir au plus 4 machines à laver en stock. Les clients achètent des machines à laver selon un processus ponctuel de Poisson, dont le taux est d'une machine par semaine. S'il reste au plus une machine en stock, le commerçant en commande 3 nouvelles. Le taux des commandes est de λ commandes par semaine. Les machines sont livrées la semaine suivante.

1. Décrire ce système par un processus de sauts markovien. Quel est son générateur ?
2. Quelle est la distribution stationnaire du système ?
3. Combien de fois par semaine le commerçant doit-il commander de nouvelles machines à laver pour que la probabilité qu'il soit en rupture de stock soit de 1/19 ?
4. Quel est alors son taux de vente de machines à laver ?

Problème (8 points)

On se donne des nombres réels $\lambda \neq \mu > 0$. On considère le processus de sauts markovien sur $\mathcal{X} = \{0, \dots, N\}$ dont le graphe est le suivant.



1. Donner le générateur L de ce processus.
2. Ce processus est-il irréductible ?
3. Soit $h(i) = \mathbb{P}_i\{\tau_0 < \tau_N\}$ la probabilité, partant de $i \in \mathcal{X}$, d'atteindre 0 avant N. Que valent $h(0)$ et $h(N)$?
4. Montrer que pour tout $t > 0$, on a
$$\begin{aligned} h(i) = {} & t\mu\mathbb{P}_i\{\tau_0 < \tau_N | X_t = i-1\} + t\lambda\mathbb{P}_i\{\tau_0 < \tau_N | X_t = i+1\} \\ & + (1 - t\mu - t\lambda)\mathbb{P}_i\{\tau_0 < \tau_N | X_t = i\} + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$
pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$, et en déduire que
$$(\lambda + \mu)h(i) = \mu h(i-1) + \lambda h(i+1) \ .$$
5. Trouver deux nombres $\alpha_\pm$ tels que l'équation précédente admette la solution $h(i) = \alpha_\pm^i$.
6. En déduire $\mathbb{P}_i\{\tau_0 < \tau_N\}$ pour tout $i \in \mathcal{X}$.
7. *Question bonus (à faire si vous avez le temps)* :
Soit $\tau = \inf\{t > 0 \colon X_t \in \{0, N\}\}$. Montrer que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{P}_i\{\tau > t\} = \mu\mathbb{P}_{i-1}\{\tau > t\} - (\lambda + \mu)\mathbb{P}_i\{\tau > t\} + \lambda\mathbb{P}_{i+1}\{\tau > t\}$$
et en déduire que
$$\mu\mathbb{E}_{i-1}(\tau) - (\lambda + \mu)\mathbb{E}_i(\tau) + \lambda\mathbb{E}_{i+1}(\tau) = -1 \ .$$
Que vaut $\mathbb{E}_i(\tau)$?