# Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

## Examen du 14 décembre 2015

*Durée:* 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs et tablettes doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

**Exercice 1 (4 points)**

On considère la chaîne de Markov sur $\mathcal{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne représente une version simplifiée de l'algorithme Pagerank de Google. Les états 1 à 5 sont des pages web, la probabilité de transition $p_{ij}$ est non nulle lorsqu'il y a un lien pointant de la page $i$ vers la page $j$, et la "racine" 0 est ajoutée artificiellement.

1. Représenter le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Calculer $\mathbb{P}_0\{X_1 = 1, X_2 = 2\}$ et $\mathbb{P}_0\{X_2 = 0\}$.
3. La chaîne est-elle irréductible? Est-elle régulière? Quel est le rôle du site 0?
4. Calculer la distribution stationnaire de la chaîne.

**Exercice 2 (4 points)**

On considère un processus de sauts markovien $X_t$ sur $\mathcal{X} = \{1,2,3\}$, de générateur infinitésimal

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le processus de sauts sous forme de graphe.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Que vaut $\lim_{t\to\infty} P_t$?
4. Soit $R = L + I$, où $I$ est la matrice identité. Montrer que $P_t = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{tR}$.
5. Calculer $R$ et montrer que

   $$\mathrm{e}^{tR} = \begin{pmatrix} f(t) & f''(t) & f'(t) \\ f'(t) & f(t) & f''(t) \\ f''(t) & f'(t) & f(t) \end{pmatrix}$$

   où $f(t)$ est la solution de l'équation différentielle

   $$f'''(t) = f(t)\,, \qquad f(0) = 1\,, \quad f'(0) = f''(0) = 0\,.$$

   (On ne demande pas de résoudre cette équation.)

**Exercice 3 (4 points)**

Dans un service clients, les appels téléphoniques arrivent selon un processus de Poisson de taux 4 appels par heure.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 2 appels (c'est-à-dire 0 ou 1 appel) durant la première heure?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 4 appels durant les deux premières heures, sachant qu'il y a eu 2 appels durant la première heure?
3. Sachant qu'il y a eu 4 appels lors des 2 premières heures, quelle est la probabilité qu'il y en ait eu 2 lors de la première heure?
4. L'employé prend une pause après avoir répondu à 10 appels. Quel est le temps moyen jusqu'à sa première pause? On néglige la probabilité qu'un appel arrive alors qu'il répond à un autre client.

**Problème (8 points)**

Le modèle de Wright–Fisher décrit l'évolution d'un gène dans une population dont chaque génération a $N$ individus. $X_n$ est le nombre d'individus de la $n$ième génération dont ce gène est de type A, alors que pour les $N - X_n$ autres individus ce gène est de type B. On admet que le nombre d'individus de la génération $n$ dont le gène est de type A suit une loi binomiale dont le paramètre $p$ est la proportion d'individus de type A de la génération précédente.

Pour décrire ce modèle mathématiquement, on considère une chaîne de Markov sur $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition sont données par

$$p_{ij} = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}$$

où on désigne par $\binom{N}{j} = \frac{N!}{j!(N-j)!}$ les coefficients binomiaux (avec la convention $0^0 = 1$).

1. Monter que les $p_{ij}$ définissent bien une matrice stochastique sur $\mathcal{X}$.
2. Calculer $p_{00}$ et $p_{NN}$. De quel type de chaîne s'agit-il?
3. On considère le cas $N = 2$.
   (a) Représenter le graphe de la chaîne.
   (b) On suppose qu'il y a initialement un individu de type A et un individu de type B ($X_0 = 1$). Déterminer la probabilité asymptotique, lorsque le temps tend vers l'infini, qu'il ne reste plus que des individus de type A.
   (c) Quel est le temps moyen jusqu' ce que tous les individus soient de même type?
4. On considère maintenant le cas général $N \geqslant 2$.
   (a) Calculer $p_{i0}$ et $p_{iN}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$.
   (b) Pour une chaîne absorbante écrite sous forme canonique $P = \left(\begin{smallmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$, montrer que la matrice $B$ donnant les probabilités d'absorption $\mathbb{P}_i\{X_\tau = j\}$ satisfait

$$[I - Q]B = R\ .$$

   (c) Vérifier que les probabilités d'absorption sont données par

$$\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} = \frac{i}{N} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_i\{X_\tau = 0\} = 1 - \frac{i}{N}\ .$$