Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 15 décembre 2014

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Une compagnie d'assurance classe les automobilistes en 3 catégories: M pour mauvais conducteurs, S pour conducteurs satisfaisants, et B pour bon conducteurs. Les statistiques montrent que d'une année à l'autre,

- 40% des mauvais conducteurs deviennent conducteurs satisfaisants, les autres restent mauvais conducteurs;
- 10% des conducteurs satisfaisants deviennent mauvais conducteurs, 30% deviennent bons conducteurs, les autres restent des conducteurs satisfaisants;
- 20% des bons conducteurs deviennent conducteurs satisfaisants, les autres restent bons conducteurs.

1. Décrire le processus par une chaîne de Markov, donner son graphe et sa matrice de transition.
2. De quel type de chaîne (absorbante, irréductible, régulière) s'agit-il?
3. On suppose qu'au départ, la moitié des conducteurs sont satisfaisants, un quart sont mauvais et un quart son bons. Quel est la proportion de conducteurs satisfaisants après 2 ans?
4. Quelle est la répartition asymptotique des conducteurs, lorsque le temps tend vers l'infini?

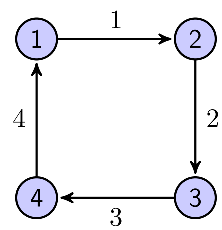
Exercice 2 (4 points)

Sur la route départementale d'Olivet à Ardon, les voitures circulent selon un processus de Poisson d'intensité 6 voitures par minute.

1. Quelle est la probabilité que 4 voitures passent entre 12h et 12h^{01}?
2. Quelle est la probabilité que 2 voitures soient passées entre 12h et 12h^{01}, sachant que 3 voitures sont passées entre 12h et 12h^{02}?
3. Un chevreuil met 5 secondes à traverser la route. Quelle est la probabilité qu'une voiture arrive pendant cet intervalle de temps?
4. Si le chevreuil met 2 secondes à traverser la route, quelle est la probabilité qu'une voiture arrive pendant cet intervalle de temps?

Exercice 3 (4 points)

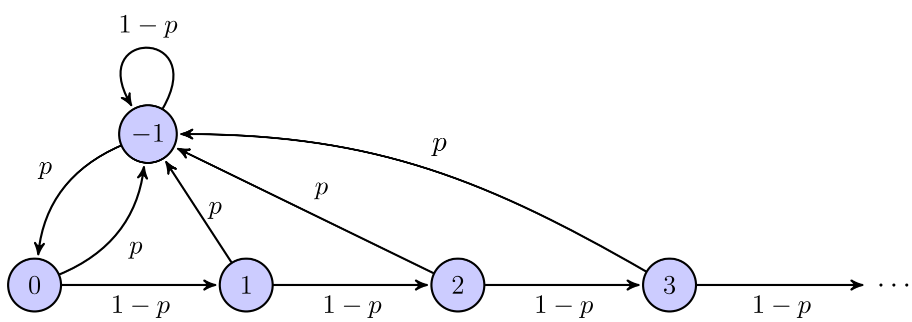
On considère un processus de sauts markovien X_t sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ dont le graphe est le suivant:



1. Déterminer le générateur du processus.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Ce processus est-il réversible?
4. Quelle est la proportion asymptotique du temps passé dans l'état 3?
5. Combien de fois ce processus saute-il en moyenne de 3 vers 4 par unité de temps, s'il est dans son état stationnaire?
6. Combien de fois ce processus saute-il en moyenne par unité de temps, s'il est dans son état stationnaire?

Problème (8 points)

Soit $p \in [0, 1]$. On considère la chaîne de Markov sur $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dont le graphe est le suivant.



1. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible?

   Dans la suite, on prend p tel que la chaîne soit irréductible.
2. Calculer $\mathbb{P}_{-1}\{\tau_0 = n\}$ pour tout $n \geqslant 0$.
3. En déduire $\mathbb{E}_{-1}(\tau_0)$.
4. Calculer $\mathbb{P}_0\{\tau_{-1} = n\}$ pour tout $n \geqslant 0$ et en déduire $\mathbb{E}_0(\tau_{-1})$.
5. Montrer que $\mathbb{E}_0(\tau_0) = \mathbb{E}_0(\tau_{-1}) + \mathbb{E}_{-1}(\tau_0)$.
6. L'état 0 est-il récurrent?
7. L'état 0 est-il récurrent positif?
8. L'état 0 est-il apériodique?
9. Soit π la distribution stationnaire. Déterminer π_0.
10. Déterminer π_i pour tout $i \in \mathcal{X}$.