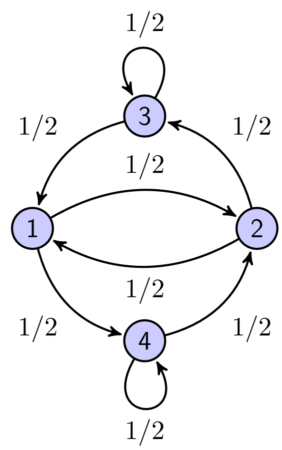
Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 18 décembre 2013

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Pour obtenir 20 points, il est demandé de résoudre les exercices 1, 2 et 3, et *au choix, soit le problème I, soit le problème II.*

Exercice 1 (4 points)

Soit la chaîne de Markov sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ dont le graphe est le suivant:



1. La chaîne est-elle irréductible?
2. La chaîne est-elle régulière?
3. Déterminer la distribution stationnaire π de la chaîne.
4. La chaîne est-elle réversible?

Exercice 2 (4 points)

On considère un processus de sauts markovien X_t sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$, de générateur infinitésimal

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le processus de sauts sous forme de graphe.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Ce processus est-il réversible?
4. Que vaut $\lim_{t\to\infty} P_t$?

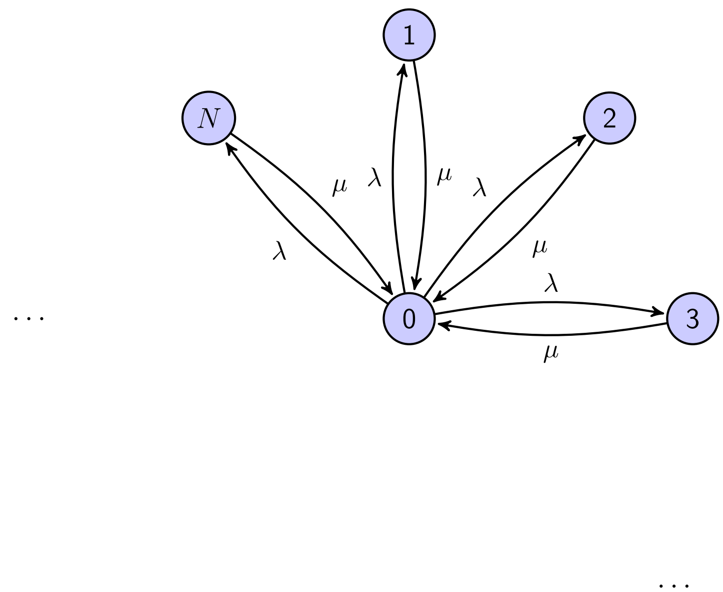
Exercice 3 (4 points)

Madame Jamilah, diseuse de bonne aventure, offre ses services à la fête foraine de Patelin-sur-Loire. On suppose que les clients arrivent selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité 4 clients par heure, et que les consultations ont une durée de loi exponentielle de moyenne 10 minutes.

1. On suppose que la longueur de le file d'attente devant la tente de Madame Jamilah est illimitée. Calculer
   (a) la distribution stationnaire de la longueur de la file;
   (b) le temps d'attente moyen d'un client;
   (c) le nombre moyen de clients par heure.
2. Suite à des problèmes avec le service d'ordre, les organisateurs de la fête interdisent toute file d'attente. Madame Jamilah établit alors une salle d'attente dans sa tente, avec une seule place. Toute personne arrivant alors que Madame Jamilah et la salle d'attente sont occupées repart aussitôt. Déterminer
   (a) la distribution stationnaire du nombre de clients;
   (b) le temps d'attente moyen d'un client;
   (c) le nombre moyen de clients par heure.

Problème I (8 points)

Soient $\lambda, \mu > 0$. On considère le processus de sauts markovien sur $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$ dont le graphe est le suivant:



1. Donner le générateur L de ce processus.
2. Déterminer la distribution stationnaire π du processus.
3. Ce processus est-il réversible?
4. On considère le cas $N = 1$. Calculer L^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire le noyau de transition P_t pour tout $t \geqslant 0$.
5. On considère le cas $N > 1$, avec $\lambda = \mu$. Pour tout $j \in \mathcal{X}$ on pose

$$Q_t(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P_t(k, j) \; .$$

   A l'aide des equations de Kolmogorov, exprimer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t(0, j) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_t(j)$$

   en fonction de $P_t(0, j)$ et $Q_t(j)$. A l'aide du résultat du point 4., en déduire $P_t(0, j)$ et $Q_t(j)$ pour tout $j \in \mathcal{X}$. On distinguera les cas $j = 0$ et $j > 0$.
6. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Calculer

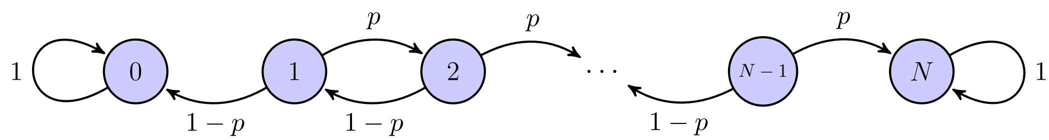
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t(i, j)$$

   et en déduire $P_t(i, j)$ pour tout $j \in \mathcal{X}$. On distinguera les cas $j = 0$ et $j > 0$.
7. Que vaut

$$\lim_{t \to \infty} P_t \; ?$$

Problème II (8 points)

Soit $p \in]0,1[$. On considère la chaîne de Markov sur $\{0, 1, \dots N\}$ dont le graphe est le suivant.



Soit
$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\}$$
le temps d'absorption et soit
$$f(i) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = N\}$$
la probabilité d'être absorbé dans l'état N.

1. Que valent $f(0)$ et $f(N)$?
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$f(i) = pf(i+1) + (1-p)f(i-1) \ .$$
3. Dans toute la suite, on suppose $p \neq 1/2$.
Montrer qu'il existe deux réels z_+ et z_- tels que l'équation pour $f(i)$ admette des solutions de la forme $f(i) = z_+^i$ et $f(i) = z_-^i$. Exprimer ces réels en fonction de $\rho = (1-p)/p$.
4. Trouver deux constantes a et b telles que
$$\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} = az_+^i + bz_-^i \ .$$
5. Soit
$$g(i) = \mathbb{E}_i(\tau) \ .$$
Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$g(i) = 1 + pg(i+1) + (1-p)g(i-1) \ .$$
6. Trouver une solution particulière de la forme $g(i) = \gamma i$ pour un $\gamma \in \mathbb{R}$ dépendant de p.
7. Vérifier que la solution générale est de la forme
$$g(i) = \gamma i + \alpha z_+^i + \beta z_-^i$$
et déterminer α et β pour que
$$\mathbb{E}_i(\tau) = \gamma i + \alpha z_+^i + \beta z_-^i \ .$$