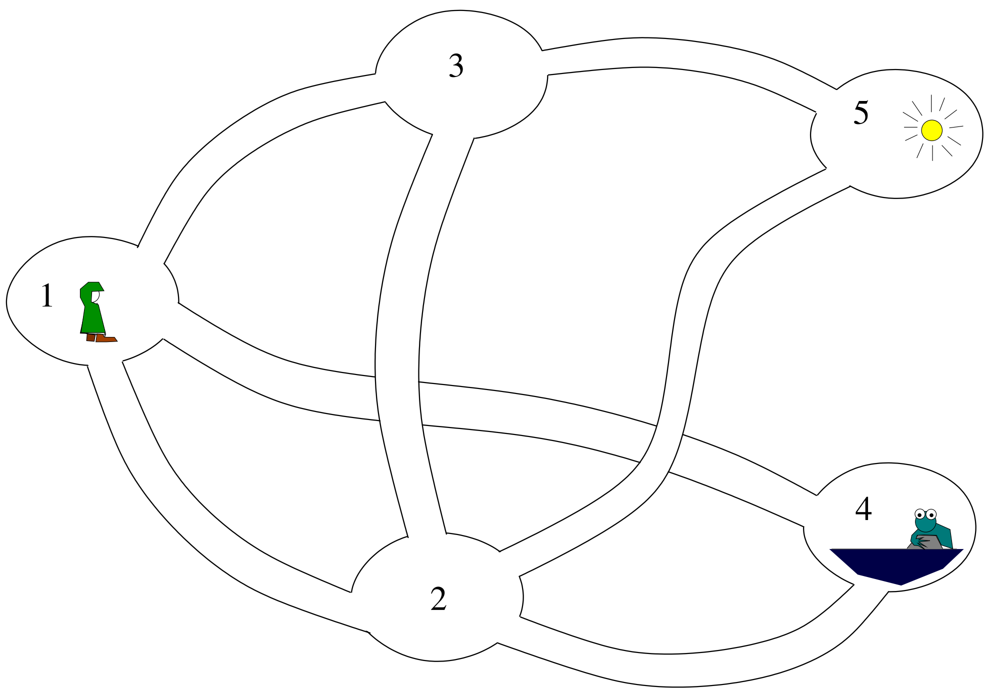
Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 17 décembre 2012

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Pour obtenir 20 points, il est demandé de résoudre les exercices 1, 2 et 3, et *au choix, soit le problème I, soit le problème II.*

Exercice 1 (4 points)

Bilbo le hobbit est perdu dans les cavernes des orques, où règne une obscurité totale. Partant de la caverne 1, il choisit de manière équiprobable l'une des galeries partant de cette caverne, et continue de cette manière jusqu'à ce qu'il aboutisse soit à la caverne de Gollum (caverne 4), soit à l'air libre (numéro 5).



1. Décrire l'itinéraire de Bilbo par une chaîne de Markov, dont on donnera la matrice de transition et la matrice fondamentale.
2. Partant de 1, quelle est la probabilité que Bilbo trouve la sortie plutôt que de déboucher dans la caverne de Gollum?
3. Combien de galeries Bilbo aura-t-il traversé en moyenne, avant de déboucher dans la caverne de Gollum ou a l'air libre?

Exercice 2 (4 points)

Dans un centre d'appel téléphonique, les appels arrivent selon un processus de Poisson de taux 10 appels par heure.

1. Si une téléphoniste fait une pause de 10 heures à 10h30, combien d'appels va-t-elle rater en moyenne durant sa pause?
2. Quelle est la probabilité qu'elle a raté au plus 2 appels?
3. Sachant que 4 appels arrivent entre 10 heures et 11 heures, quelle est la probabilité qu'elle n'a raté aucun appel durant sa pause? Qu'elle n'a raté qu'un appel?
4. Sachant qu'il y aura 2 appels entre 10h30 et 11 heures, quelle est la probabilité qu'ils arrivent tous entre 10h30 et 10h45?

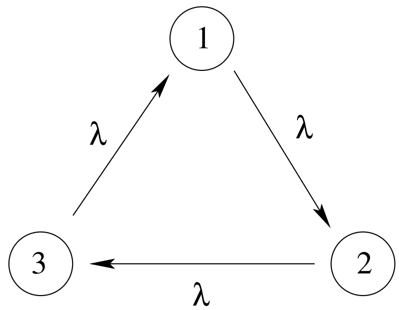
Exercice 3 (4 points)

Thelma et Louise tiennent un salon de coiffure, dont la salle d'attente comporte deux chaises. Pour coiffer un client, chacune passe un temps de loi exponentielle, de moyenne 30 minutes. Les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux de 5 par heure. Si les deux chaises de la salle d'attente sont occupées lors de l'arrivée d'un client, celui-ci repart aussitôt.

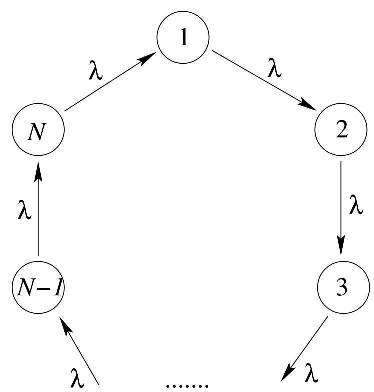
1. Déterminer le distribution stationnaire du processus.
2. Quelle est la probabilité que la salle d'attente soit pleine?
3. Quelle est la probabilité que les deux coiffeuses, l'une des deux, ou aucune des deux ne soit occupée?
4. Quel est le temps d'attente moyen des clients?
5. Pendant quelle fraction de temps Louise est-elle occupée à coiffer un client? Avez-vous fait une hypothèse particulière pour arriver à ce résultat?

Problème I (8 points)

On considère le processus de sauts markovien sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ dont le graphe est le suivant:



1. Donner le générateur L de ce processus.
2. Déterminer la distribution stationnaire π du processus.
3. Soit R la matrice telle que $L = -\lambda I + \lambda R$. Calculer R^2, R^3, puis R^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire $\mathrm{e}^{\lambda t R}$, puis le noyau de transition P_t pour tout t.
5. On considère maintenant le processus de sauts sur $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$ dont le graphe est le suivant:



   Donner le générateur L de ce processus.
6. Déterminer la distribution stationnaire π du processus.
7. Indiquer la forme du noyau de transition P_t pour tout t.

Indication: On pourra admettre les développements limités suivants.
Soit $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ et

$$f(x) = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{\bar{\omega} x}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^{x} + 2\,\mathrm{e}^{-x/2}\cos\big(\sqrt{3}x/2\big)\Big) .$$

Alors

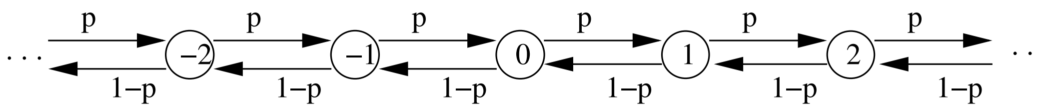
$$f(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{1}{(3n)!}x^{3n} + \dots$$

$$f'(x) = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(3n-1)!}x^{3n-1} + \dots$$

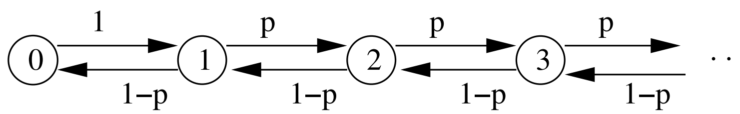
$$f''(x) = x + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(3n-2)!}x^{3n-2} + \dots .$$

Problème II (8 points)

Soit $p \in [0,1]$. On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont le graphe est le suivant.



1. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible?
   On suppose dans la suite que p est tel que la chaîne soit irréductible.
2. La chaîne est-elle apériodique?
3. Calculer explicitement
   $$\mathbb{P}_0\bigl\{X_{2n} = 0\bigr\}$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. A l'aide de la formule de Stirling, trouver un équivalent de $\mathbb{P}_0\{X_{2n}\} = 0$ pour $n \to \infty$. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle récurrente? Transiente?
5. Soit maintenant Y_n la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont le graphe est le suivant:

   Montrer que si $X_0 = Y_0 > 0$, alors
   $$Y_n = X_n \quad \forall n \leqslant \tau_0 \ .$$
6. En déduire une condition suffisante sur p pour que la chaîne Y_n soit transiente.
7. Pour quelles valeurs de p la chaîne Y_n admet-elle une distribution stationnaire π? En déduire pour quels p la chaîne Y_n est récurrente positive.
8. Montrer que pour $p = 1/2$, on a $Y_n = |X_n|$. Que peut-on en déduire sur les propriétés de récurrence/transience de la chaîne Y_n?

Rappel: Formule de Stirling

$$n! = n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \left[1 + \mathcal{O}\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\right] .$$