Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 19 décembre 2011

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Pour obtenir 20 points, il est demandé de résoudre les exercices 1, 2 et 3, et *au choix, soit le problème I, soit le problème II.*

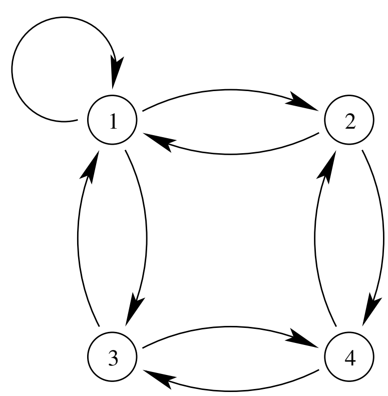
Exercice 1 (4 points)

On suppose que les étoiles filantes apparaissent dans le ciel d'une ville selon un processus de Poisson avec un taux de $\lambda = 0.5$ étoiles filantes par nuit.

1. Quelle est la probabilité qu'on observe une étoile filante lundi, et deux étoiles filantes pendant le reste de la semaine (entre mardi et dimanche)?
2. Donner la probabilité d'observer une étoile filante mardi, sachant qu'on a observé une étoile filante lundi.
3. Sachant qu'on a observé 10 étoiles filantes durant le mois d'avril (30 jours), quelle est la probabilité d'avoir observé moins de deux étoiles filantes durant les 10 premiers jours?
4. Combien de nuits faut-il attendre en moyenne pour observer 10 étoiles filantes?

Exercice 2 (4 points)

On considère une chaîne de Markov sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, dont les seules probabilités de transition non nulles sont indiquées par des flèches sur la figure suivante:



1. Déterminer les probabilités de transition de telle manière que la chaîne soit réversible et admette la distribution stationnaire $\pi = (0.5, 0.2, 0.2, 0.1)$.
2. La chaîne ainsi construite est-elle irréductible? Est-elle régulière?
3. On note P la matrice de transition. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} P^n \; .$$

Exercice 3 (4 points)

On considère un processus de sauts markovien X_t sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, de générateur infinitésimal

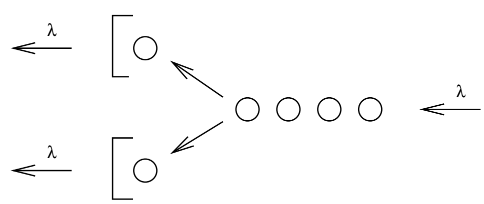
$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le processus de sauts sous forme de graphe.
2. Déterminer la distribution stationnaire du processus.
3. Le processus X_t est-il irréductible?
4. Le processus X_t est-il réversible?

Problème I (8 points)

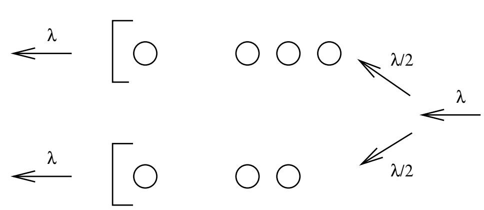
Le but du problème est de comparer deux types de files d'attente à deux serveurs.

Dans le premier cas, les clients forment une seule file et choisissent le premier serveur qui se libère (file M/M/2). On suppose que les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ, et qu'ils sont servis pendant un temps exponentiel de paramètre $\mu = \lambda$.



1. Déterminer la distribution stationnaire π de la file.
2. Quelle est la probabilité qu'un client ne doive pas attendre avant d'être servi?
3. Quel est le temps d'attente moyen avant d'être servi?
4. Soit S le nombre de serveurs occupés. Déterminer $\mathbb{E}_\pi(S)$.

Dans le second cas, il y a une file distincte devant chaque serveur. Les clients choisissent une file ou l'autre avec probabilité 1/2.



5. Expliquer pourquoi du point de vue du client, ce cas est équivalent à une file M/M/1 avec taux $\lambda/2$ et λ.
6. Déterminer la distribution stationnaire π du système.
7. Quelle est la probabilité qu'un client ne doive pas attendre avant d'être servi?
8. Quel est le temps d'attente moyen avant d'être servi?
9. Soit S le nombre de serveurs occupés. Déterminer $\mathbb{E}_\pi(S)$.
10. Comparer les deux systèmes.

Problème II (8 points)

On considère une marche aléatoire symétrique sur $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$, avec conditions au bord absorbantes, c'est-à-dire que dès que la marche atteint l'un des états 0 ou N, elle y reste indéfiniment. Soit

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\}$$

le temps d'absorption. Par convention, $\tau = 0$ si $X_0 \in \{0, N\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathcal{X}$ on pose

$$f(i, \lambda) = \mathbb{E}_i\big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} 1_{\{X_\tau = N\}}\big) = \begin{cases} \mathbb{E}_i\big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\big) & \text{si } X_\tau = N \ , \\ 0 & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

1. Que valent $f(0, \lambda)$ et $f(N, \lambda)$?
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$\mathbb{P}_i\{\tau = n\} = \frac{1}{2}\big[\mathbb{P}_{i-1}\{\tau = n-1\} + \mathbb{P}_{i+1}\{\tau = n-1\}\big] \ .$$
3. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$f(i, \lambda) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\big[f(i-1, \lambda) + f(i+1, \lambda)\big] \ .$$
4. Trouver une relation entre c et λ telle que l'équation ci-dessus pour f admette des solutions de la forme $f(i, \lambda) = \mathrm{e}^{ci}$. Montrer à l'aide d'un développement limité que
$$c^2 = 2\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \ .$$
5. Déterminer des constantes a et b telles que
$$\mathbb{E}_i\big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} 1_{\{X_\tau = N\}}\big) = a\,\mathrm{e}^{ci} + b\,\mathrm{e}^{-ci} \ .$$
6. Effectuer un développement limité au premier ordre en λ de l'égalité ci-dessus. En déduire
$$\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\}$$
et
$$\mathbb{E}_i\big(\tau 1_{\{X_\tau = N\}}\big) \ .$$
7. Sans faire les calculs, indiquer comment procéder pour déterminer la variance de $\tau 1_{\{X_\tau = N\}}$ et l'espérance et la variance de τ.

On rappelle les développements limités suivants:

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \ ,$$
$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \ .$$