Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 15 décembre 2010

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Pour obtenir 20 points, il est demandé de résoudre les exercices 1, 2 et 3, et *au choix, soit le problème I, soit le problème II.*

Exercice 1 (4 points)

Le temps qu'il fait dans une certaine ville est classé en trois types: Pluie, neige et beau temps. On suppose que s'il pleut, il y a une chance sur trois qu'il pleuve le lendemain, une chance sur six qu'il neige, et une chance sur deux qu'il fasse beau. S'il neige, il y a une chance sur deux qu'il pleuve le lendemain, et une chance sur deux qu'il neige. S'il fait beau, il y a une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain, et trois chance sur quatre qu'il pleuve. On suppose que le temps du jour n ne dépend que du temps qu'il fait le jour $n-1$.

1. Formuler le problème comme une chaîne de Markov en temps discret. De quel type de chaîne s'agit-il?
2. Déterminer la probabilité asymptotique qu'il pleuve, qu'il neige ou qu'il fasse beau.
3. Quelle est l'intervalle moyen entre deux jours de neige?

Exercice 2 (4 points)

Un centre d'appel est ouvert de 8 heures 17 heures. Durant cette période, on suppose que les appels de clients arrivent selon un processus de Poisson, avec en moyenne 3 appels par heure. Déterminer les probabilités suivantes:

1. Le premier appel arrive après 8h20.
2. L'intervalle de temps entre le premier et le second appel est compris entre 20 et 40 minutes.
3. Sachant qu'il y a eu deux appels entre 8 heures et 9 heures, les deux sont arrivés entre 8h20 et 8h40.
4. Sachant qu'au moins un appel est arrivé entre 8 heures et 8h20, il y aura moins de trois appels entre 8 heures et 9 heures.

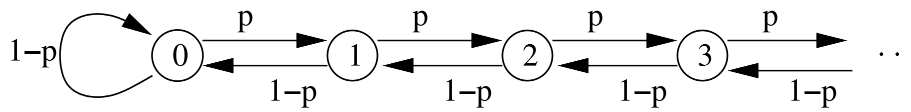
Exercice 3 (4 points)

La salle d'attente du Docteur H comprend 3 chaises. Les patients arrivent selon un processus de Poisson de taux 6 patients par heure. Les patients trouvant les 3 chaises occupées partent chercher un autre médecin. Les consultations suivent une loi exponentielle de moyenne 15 minutes.

1. Quelle est la probabilité que la salle d'attente soit pleine?
2. Calculer le temps d'attente moyen d'un patient avant la consultation.
3. Combien de patients le Docteur traite-t-il par heure en moyenne?

Problème I (8 points)

Soit $p \in [0,1]$. On considère la chaîne de Markov suivante sur $\mathcal{X} = \mathbb{N}$:

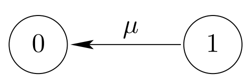


1. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible?
   On suppose dans la suite que p est tel que la chaîne soit irréductible.
2. La chaîne est-elle apériodique?
3. On suppose que la chaîne est réversible, et soit α un vecteur réversible. Ecrire une relation de récurrence pour les composantes de α, et en déduire α_n en fonction de α_0.
4. Pour quelles valeurs de p la chaîne admet-elle une distribution stationnaire π? Déterminer π pour ces valeurs de p.
5. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle récurrente? Récurrente positive?
6. Déterminer le temps de récurrence moyen $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
7. Calculer la position moyenne $\mathbb{E}_\pi(X_n)$ pour les valeurs de p telles que π existe.

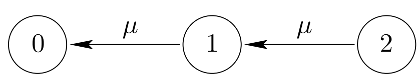
Problème II (8 points)

On modélise la désintégration radioactive de N atomes par un processus de sauts markovien $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ sur $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$ de taux $q(n, -1) = \mu$, X_t désignant le nombre d'atomes non désintégrés au temps t.

1. On considère le cas $N = 1$:

   Déterminer le générateur L. Calculer L^2, puis L^n pour tout n. En déduire le noyau de transition P_t.
2. On considère maintenant le cas $N = 2$:

   Déterminer le générateur L et écrire les équations de Kolmogorov progessives. Résoudre ces équations pour la condition initiale $X_0 = 2$, c'est-à-dire trouver $P_t(2, j)$ pour $j = 2, 1, 0$.
   Indication : La solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\mu x + f(t)$ s'écrit

   $$x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\, f(s)\,\mathrm{d}s\ .$$

3. Par le même procédé, calculer $P_t(N, j)$ pour $j = N, N-1, \dots, 0$ pour N quelconque.
4. Calculer

   $$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(Y_t)$$

   où $Y_t = N - X_t$ est le nombre d'atomes désintégrés au temps t, s'il y a N atomes au temps 0.