Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 14 décembre 2009

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Pour obtenir 20 points, il est demandé de résoudre les exercices 1, 2 et 3, et *au choix, soit le problème I, soit le problème II.*

Exercice 1 (4 points)

Un serveur informatique envoie des messages selon un processus ponctuel de Poisson. En moyenne, il envoie un message toutes les 30 secondes.

1. Quelle est la probabilité que le serveur n'envoie aucun message au cours des 2 premières minutes de sa mise en service?
2. A quel moment espérez-vous le second message (quel est le temps moyen de l'envoi du second message)?
3. Quelle est la probabilité que le serveur n'ait pas envoyé de message durant la première minute, sachant qu'il a envoyé 3 messages au cours des 3 premières minutes?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 3 messages au cours des 2 premières minutes, sachant qu'il y en a eu au moins 1 au cours de la première minute?

Exercice 2 (4 points)

Deux joueurs A et B s'affrontent dans une partie de tennis. Chaque point joué est gagné par le joueur A avec une probabilité de 3/5, sinon il est gagné par B. On suppose les points indépendants.

Initialement, les deux joueurs sont à égalité. Pour gagner la partie, un joueur doit obtenir une avance de deux points sur son opposant.

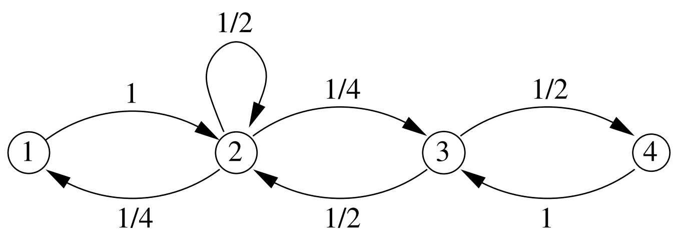
1. Modéliser le jeu par une chaîne de Markov absorbante à 5 états: Egalité (deuce), Avantage A, Avantage B, A gagne, et B gagne. Donner la matrice de transition de cette chaîne.
2. Montrer que la matrice fondamentale de la chaîne est donnée par

$$N = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 10 & 19 & 4 \\ 15 & 9 & 19 \end{pmatrix} .$$

3. Calculer la probabilité que A gagne, si les joueurs sont initialement à égalité.
4. Calculer la durée moyenne du jeu si les joueurs sont initialement à égalité.

Exercice 3 (4 points)

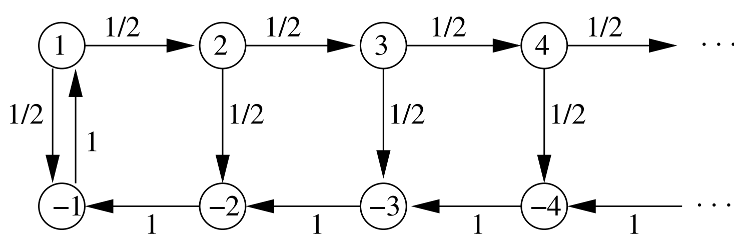
On considère la chaîne de Markov suivante :



1. Donner la matrice de transition P de la chaîne.
2. La chaîne est-elle irréductible?
3. La chaîne est-elle régulière?
4. Déterminer la distribution stationnaire de la chaîne.
5. La chaîne est-elle réversible?

Problème I (8 points)

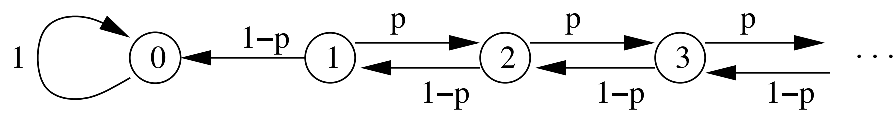
On considère la chaîne de Markov suivante sur $\mathcal{X} = \mathbb{Z}^*$:



1. La chaîne est-elle irréductible?
2. L'état 1 est-il récurrent?
3. L'état 1 est-il récurrent positif?
4. L'état 1 est-il apériodique?
5. Soit π la distribution stationnaire de la chaîne. Calculer π_1.
6. Calculer π_i pour tout $i \in \mathcal{X}$.

Problème II (8 points)

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$, absorbée en 0:



On note $h(i) = \mathbb{P}_i\{\tau_0 < \infty\}$.

1. Déterminer $h(0)$.
2. Montrer que
$$h(i) = (1-p)h(i-1) + ph(i+1) \tag{1}$$
pour tout $i \geqslant 1$.
3. On considère le cas $p = 1/2$. En se basant sur les propriétés des fonctions harmoniques dérivées en TD, déterminer $h(i)$ pour tout i.
Indication: $h(i)$ est une probabilité.
4. Nous considérons à partir de maintenant le cas général $0 < p < 1$. Montrer que tout h solution de (1) satisfait encore le principe du maximum: pour tout ensemble $A = \{a, a+1, \dots, b-1, b\} \subset \mathbb{N}$, h atteint son maximum au bord $\partial A = \{a, b\}$ de A.
5. Montrer que deux solutions de l'équation (1), coïncidant sur le bord de A, sont égales partout dans A.
6. Montrer que $h(i) = \alpha^i$ satisait l'équation (1) pour certaines valeurs de α qu'on déterminera.
7. En déduire l'unique solution pour h lorsque $p < 1/2$. Trouver deux solutions possibles lorsque $p > 1/2$.