Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 8 décembre 2008

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Pour obtenir 20 points, il est demandé de résoudre les exercices 1, 2 et 3, et *au choix, soit le problème I, soit le problème II.*

Exercice 1 (4 points)

Dans un serveur informatique, les requêtes arrivent selon un processus ponctuel de Poisson, avec un taux de 60 requêtes par heure. Déterminer les probabilités suivantes :

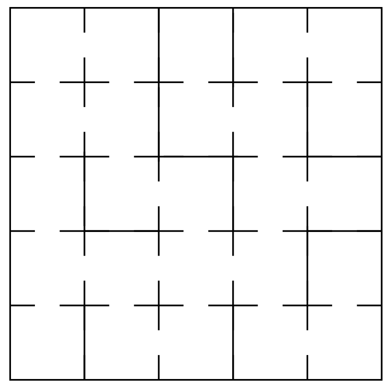
1. L'intervalle entre les deux premières requêtes est compris entre 2 et 4 minutes.
2. Aucune requête n'arrive entre 14h et 14h05.
3. Sachant que deux requêtes sont arrivées entre 14h et 14h10, les deux sont arrivées dans les 5 premières minutes.
4. Sachant que deux requêtes sont arrivées entre 14h et 14h10, au moins une est arrivée dans les 5 premières minutes.

Exercice 2 (4 points)

Angèle possède 3 parapluies. Chaque jour, elle va au bureau le matin, et revient à son domicile le soir. Pour chaque trajet, elle emporte avec elle un parapluie s'il pleut, et s'il y en a au moins un sur place. Elle n'emporte pas de parapluie s'il ne pleut pas. On suppose que la probabilité qu'il pleuve au début de chaque trajet est de $1/3$, et qu'elle est indépendante de la météo lors de tous les autres trajets. Soit X_n le nombre de parapluies qu'Angèle possède sur place avant de débuter le $n$ième trajet.

1. Montrer que $\{X_n\}_n$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
2. De quel type de chaîne s'agit-il?
3. Quelle est la probabilité, asymptotiquement au bout d'un grand nombre de voyages, qu'Angèle ne dispose pas de parapluie sur place au moment de partir?
4. Quelle est la probabilité asymptotique qu'elle se fasse mouiller bêtement, c'est-à-dire qu'elle n'ait pas de parapluie à sa disposition alors qu'il pleut dès son départ?

Exercice 3 (4 points)



Une souris se déplace dans le labyrinthe ci-dessus. On suppose qu'à chaque unité de temps, elle quitte la case dans laquelle elle se trouve, en choisissant l'une des portes donnant sur une autre case, uniformément au hasard.

Déterminer le temps de récurrence moyen vers le coin supérieur droit, en justifiant soigneusement la réponse.

Problème I (8 points)

Soit X_n un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ.
Soit Y_n le processus obtenu en effaçant chaque X_n $(n \geqslant 1)$ avec probabilité $1/2$, indépendamment de tous les autres, puis en renumérotant les points restants par les entiers positifs. On note N_t, respectivement M_t, le nombre de X_n, respectivement Y_n, dans l'intervalle $]0, t]$.

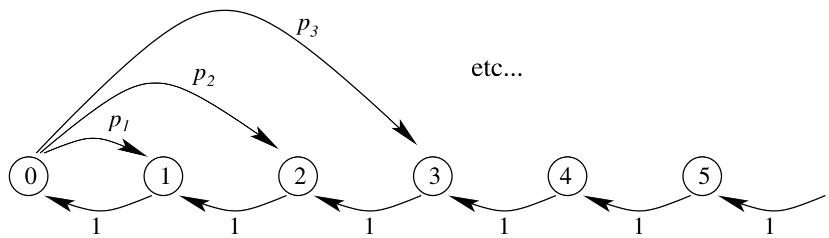
1. Donner la loi de N_t.
2. Montrer que pour tout k, $l \mapsto \mathbb{P}\{M_t = l | N_t = k\}$ suit une loi binomiale, et déterminer ses paramètres.
3. En déduire la loi de M_t.
4. Montrer que Y_n est un processus ponctuel de Poisson, et déterminer son intensité.
5. Que se passe-t-il si on efface chaque X_n avec probabilité $1 - q$, $0 < q < 1$?

Problème II (8 points)

Un client arrive dans une banque. Devant l'unique guichet, il y a une queue de longueur aléatoire L. La loi de L est donnée par $\mathbb{P}\{L = k\} = p_k$, $k = 1, 2, \dots$ (on suppose $\sum_{k\geqslant 1} p_k = 1$).

On admet que chaque client est servi pendant un intervalle de temps de longueur 1. Une fois le premier client servi, notre client avance d'une unité dans la file. Une fois servi, on suppose que le client se place à nouveau au bout de la queue.

On modélise la situation par la chaîne de Markov suivante :



1. Sous quelle condition sur les p_k la chaîne est-elle irréductible?
   Pour le reste du problème, on suppose les p_k tels que la chaîne soit irréductible.
2. On suppose $X_0 = 0$. Soit
   $$\tau_0 = \inf\{n > 0 \colon X_n = 0\}$$
   le temps de premier retour en 0. Déterminer sa loi.
3. Montrer que l'état 0 est récurrent.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_k pour que l'état 0 soit récurrent positif.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_k pour que l'état 0 soit apériodique.
6. Soit π l'unique distribution stationnaire de la chaîne. Calculer π_0 à l'aide de $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
7. Par récurrence, déterminer π_i pour tout i.