Mathématiques financières

Examen du 20 novembre 2012

Durée: 2 heures
Documents non autorisés
Les points sont donnés à titre indicatif

Questions de cours [4 points]

1. Expliquer en quelques phrases le fonctionnement d'une option de vente européenne.
2. Expliquer en quelques mots l'utilité de la mesure de risque neutre dans le modèle binomial.
3. Expliquer pourquoi un modèle binomial dans lequel $s_0(1+r) \leqslant s_{1,1} < s_{1,2}$ n'est pas viable.
4. Quelle est la principale limitation de la formule de Black–Scholes?

Problème 1 [6 points]

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

Ω	$\overline{S}_0$	$\overline{S}_1$	$\overline{S}_2$
ω^1	$(1,10)$	$(1,5)$	$(1,4)$
ω^2	$(1,10)$	$(1,5)$	$(1,6)$
ω^3	$(1,10)$	$(1,15)$	$(1,10)$
ω^4	$(1,10)$	$(1,15)$	$(1,20)$

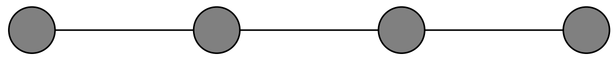
Marché 2:

Ω	$\overline{S}_0$	$\overline{S}_1$	$\overline{S}_2$
ω^1	$(1,10)$	$(1,6)$	$(1,5)$
ω^2	$(1,10)$	$(1,6)$	$(1,10)$
ω^3	$(1,10)$	$(1,12)$	$(1,15)$
ω^4	$(1,10)$	$(1,12)$	$(1,20)$

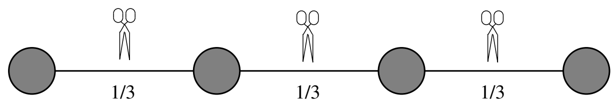
1. Lesquels de ces marchés sont viables? Si un marché n'est pas viable, expliquer pourquoi.
   Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.
2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre $\mathbb{P}^*$.
3. On considère une option d'achat de prix d'exercice réactualisé $\overline{K} = 8$. Sa fonction de paiement est donc $g(\overline{S}_2^2) = (\overline{S}_2^2 - 8)_+$. Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas ω^1.

Problème 2 [10 points]

On considère une chaîne de 4 “particules”:

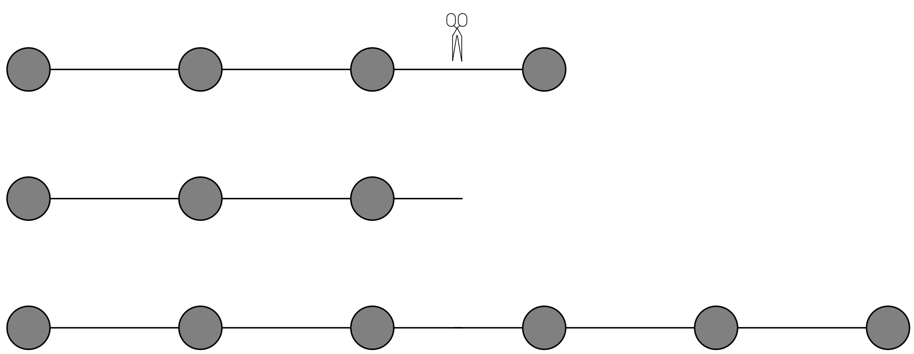


On choisit au hasard, de manière uniforme, l'un des 3 liens. On coupe ce lien et on ne garde que le morceau de gauche de la chaîne (la partie de la chaîne à gauche du lien coupé).



On continue de la même manière avec le morceau de gauche. Si ce morceau ne contient qu'une particule (donc pas de lien), on ne le modifie pas.

1. On note X_n le nombre de particules que l'on a gardé à l'étape n. Spécifier un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de décrire les trois premières générations, et expliciter la filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
2. Donner les lois de X_0, X_1 et X_2.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1|X_0)$ et $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.
4. La suite (X_0, X_1, X_2) est-elle une martingale? Une surmartingale? Une sous-martingale?
5. On modifie le procédé de la manière suivante: après avoir coupé un lien, on recolle au morceau de gauche une copie de ce morceau. Exemple:

   On note X_n le nombre de particules à l'étape n (après n coupes et n recollements). La suite (X_0, X_1, X_2) est-elle une martingale? Une surmartingale? Une sous-martingale?
6. **Question bonus** (à faire si vous avez le temps):
   Généraliser à un nombre quelconque de particules initiales, et à un nombre quelconque d'étapes.