

Mathématiques financières

Examen du 4 janvier 2011

Durée: 2 heures

Documents non autorisés

Les points sont donnés à titre indicatif

Questions de cours [4 points]

1. Donner la définition d'une surmartingale $\{X_n\}_{n \geq 0}$ dans un espace probabilisé muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$.
2. Quelle est la signification du terme "vendre à découvert des titres risqués"?
3. Expliquer en quelques phrases le fonctionnement d'une option de vente européenne.
4. Expliquer pourquoi un modèle binomial dans lequel $s_0(1+r) \leq s_{1,1} < s_{1,2}$ n'est pas viable.

Problème 1 [8 points]

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule bleue. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire de manière répétée une urne de la boule, et on la remet en ajoutant une boule de la même couleur. Soit X_n la proportion de boules rouges (le nombre de boules rouges divisé par le nombre total de boules) se trouvant dans l'urne après le n ème tirage.

1. Spécifier un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de décrire les deux premiers tirages, et expliciter la filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
2. Donner les lois de X_0 , X_1 et X_2 .
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1|X_0)$ et $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.
4. La suite (X_0, X_1, X_2) est-elle une martingale?
5. Généraliser au cas d'un nombre quelconque de tirage.

Problème 2 [8 points]

On considère un modèle de marché, décrit par le tableau ci-dessous (en prix réactualisés) :

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 16)	(1, 8)	(1, 4)
ω^2	(1, 16)	(1, 8)	(1, 14)
ω^3	(1, 16)	(1, 28)	(1, 14)
ω^4	(1, 16)	(1, 28)	(1, 49)

1. Montrer qu'il s'agit d'un marché de Cox–Ross–Rubinstein, et que ce marché est viable.
2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre \mathbb{P}^* .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé $\bar{K} = 29$. Sa fonction de paiement est donc $g(\bar{S}_2) = (29 - \bar{S}_2)_+$. Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas ω^1 .