

# Mathématiques financières

Examen du 21 décembre 2011

Durée: 2 heures

Documents non autorisés

Les points sont donnés à titre indicatif

## Questions de cours [4 points]

1. Qu'est-ce qu'une opportunité d'arbitrage?
2. Un marché financier comportant une opportunité d'arbitrage est-il viable? Expliquer pourquoi.
3. Expliquer pourquoi un modèle binomial dans lequel  $s_0(1+r) \leq s_{1,1} < s_{1,2}$  n'est pas viable.
4. Quelle est la principale limitation de la formule de Black–Scholes?

## Problème 1 [8 points]

Le loir du Loiret (*Marmota orleanensis*) se reproduit selon les règles suivantes: un couple reste sans descendants avec probabilité  $p$ , où  $0 < p < 1/2$ . Avec probabilité  $1/2$ , il a exactement un couple de descendants (toujours un mâle et une femelle), et avec probabilité  $q = 1/2 - p$ , il a deux couples de descendants. On note  $X_n$  le nombre de couples de la génération  $n$ , et on suppose que  $X_0 = 1$ .

1. Spécifier un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  permettant de décrire les trois premières générations, et expliciter la filtration canonique  $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ .
2. Donner les lois de  $X_0$ ,  $X_1$  et  $X_2$ .
3. Calculer  $\mathbb{E}(X_1|X_0)$  et  $\mathbb{E}(X_2|X_1)$ .
4. Pour quelles valeurs de  $p$  la suite  $(X_0, X_1, X_2)$  est-elle une martingale? Une surmartingale? Une sous-martingale?
5. Généraliser au cas d'un nombre quelconque de générations.

## Problème 2 [8 points]

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

$\Omega$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$
$\omega^1$	(1, 8)	(1, 6)	(1, 5)
$\omega^2$	(1, 8)	(1, 6)	(1, 6)
$\omega^3$	(1, 8)	(1, 12)	(1, 10)
$\omega^4$	(1, 8)	(1, 12)	(1, 15)

Marché 2:

$\Omega$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$
$\omega^1$	(1, 10)	(1, 6)	(1, 5)
$\omega^2$	(1, 10)	(1, 6)	(1, 10)
$\omega^3$	(1, 10)	(1, 12)	(1, 10)
$\omega^4$	(1, 10)	(1, 12)	(1, 15)

1. Lesquels de ces marchés sont viables?  
Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.
2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre  $\mathbb{P}^*$ .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé  $\bar{K} = 9$ . Sa fonction de paiement est donc  $g(\bar{S}_2) = (9 - \bar{S}_2)_+$ . Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas  $\omega^1$ .