

# Mathématiques financières

Examen du 16 décembre 2009

Durée: 2 heures

Documents non autorisés

Les points sont donnés à titre indicatif

## Questions de cours [4 points]

1. Qu'est-ce qu'une opportunité d'arbitrage?
2. Qu'est-ce qu'une filtration d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ?
3. Expliquer en quelques mots l'utilité de la mesure de risque neutre dans le modèle binomial.
4. Expliquer la différence entre une option de vente et une option d'achat (européenne).

## Problème 1 [8 points]

On se donne deux nombres réels positifs  $p, q$  tels que  $p + q < 1$ . On suppose que dans une population, chaque individu a

- aucun enfant avec probabilité  $1 - p - q$ ,
- un enfant avec probabilité  $p$ ,
- deux enfants avec probabilité  $q$ .

On admet que la génération 0 comprend  $X_0 = 1$  individu. Soit  $X_n$  le nombre d'individus de la génération  $n$  ( $X_1$  est le nombre d'enfants du premier individu,  $X_2$  le nombre de ses petits-enfants, etc).

1. Quelle est la filtration canonique  $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  définie par les générations 0, 1 et 2?
2. Calculer  $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0)$ .
3. Calculer  $\mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1)$ .
4. Pour quelles valeurs de  $p, q$  le processus  $(X_0, X_1, X_2)$  est-il une sous-martingale? Une surmartingale? Une martingale?
5. Peut-on généraliser à la génération  $n$ ?

## Problème 2 [8 points]

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

$\Omega$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$
$\omega^1$	(1, 10)	(1, 6)	(1, 5)
$\omega^2$	(1, 10)	(1, 6)	(1, 10)
$\omega^3$	(1, 10)	(1, 12)	(1, 10)
$\omega^4$	(1, 10)	(1, 12)	(1, 15)

Marché 2:

$\Omega$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$
$\omega^1$	(1, 8)	(1, 6)	(1, 5)
$\omega^2$	(1, 8)	(1, 6)	(1, 6)
$\omega^3$	(1, 8)	(1, 12)	(1, 10)
$\omega^4$	(1, 8)	(1, 12)	(1, 15)

1. Lesquels de ces marchés sont viables?  
Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.
2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre  $\mathbb{P}^*$ .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé  $\bar{K} = 11$ . Sa fonction de paiement est donc  $g(\bar{S}_2) = (11 - \bar{S}_2)_+$ . Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas  $\omega^1$ .