

# Mathématiques financières

Examen du 16 décembre 2008

Durée: 2 heures

Documents non autorisés

Les points sont donnés à titre indicatif

## Questions de cours [4 points]

1. Un marché financier comportant une opportunité d'arbitrage est-il viable? Expliquer pourquoi.
2. Expliquer en quelques mots l'utilité de la mesure de risque neutre dans le modèle binomial.
3. Quelle est la signification du terme "vendre à découvert des titres risqués"?
4. Expliquer la différence entre le modèle binomial et le modèle de Cox–Ross–Rubinstein.

## Problème 1 [8 points]

Une urne contient initialement 1 boule rouge et 1 boule noire. Un jeu consiste à tirer une boule de l'urne.

- Si la boule est rouge, on gagne  $g$  euros. On replace alors la boule dans l'urne, ainsi qu'une seconde boule rouge.
- Si la boule est noire, on perd 1 euro. On replace alors la boule dans l'urne, ainsi qu'une seconde boule noire.

On tire alors à nouveau une boule de l'urne, et on suit les mêmes règles que ci-dessus. On considère les variables aléatoires

- $X_k$  égale à la proportion de boules rouges dans l'urne (le nombre de boules rouges divisé par le nombre total de boules) après  $k$  tirage.
  - $Y_k$  égale à la somme totale gagnée après  $k$  tirages.
1. Quelle est la filtration canonique  $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  définie par les deux premiers tirages?
  2. Calculer  $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0)$  et  $\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{F}_0)$ .
  3. Calculer  $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$  et  $\mathbb{E}(Y_2|\mathcal{F}_1)$ .
  4. Pour quelles valeurs de  $g$  processus  $(Y_0, Y_1, Y_2)$  est-il une sous-martingale? Une sur-martingale? Une martingale?
  5. Soit  $r_k$  le nombre de boules rouges se trouvant dans l'urne après  $k$  tirages. Quelles sont les valeurs possibles de  $r_k$  et de  $X_k$ ?
  6. Calculer  $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k)$  et  $\mathbb{E}(Y_{k+1} - Y_k|\mathcal{F}_k)$  en fonction de  $r_k$ . Que peut-on en conclure sur les suites  $X_k$  et  $Y_k$ ?

## Problème 2 [8 points]

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

$\Omega$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$
$\omega^1$	(1, 3)	(1, 2)	(1, 1)
$\omega^2$	(1, 3)	(1, 2)	(1, 6)
$\omega^3$	(1, 3)	(1, 5)	(1, 4)
$\omega^4$	(1, 3)	(1, 5)	(1, 10)

Marché 2:

$\Omega$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$
$\omega^1$	(1, 4)	(1, 3)	(1, 2)
$\omega^2$	(1, 4)	(1, 3)	(1, 6)
$\omega^3$	(1, 4)	(1, 6)	(1, 7)
$\omega^4$	(1, 4)	(1, 6)	(1, 10)

1. Lesquels de ces marchés sont viables?  
Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.
2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre  $\mathbb{P}^*$ .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé  $\bar{K} = 3$ . Sa fonction de paiement est donc  $g(\bar{S}_2) = (3 - \bar{S}_2)_+$ . Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas  $\omega^1$ .