Martingales et calcul stochastique

Examen du 7 janvier 2013

Durée: 3 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Les problèmes sont indépendants.

Problème 1 (3 points)

Une fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est dite *sous-harmonique* si pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$,

$$f(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\,\mathrm{d}\theta \;.$$

f est dite *surharmonique* si $-f$ est sous-harmonique, et *harmonique* si elle est à la fois sous-harmonique et surharmonique.

On fixe $r > 0$. Soit $\{U_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, et soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(U_1, \dots, U_n)$. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$X_n = U_1 + \dots + U_n \qquad \text{et} \qquad Y_n = f(X_n) \;.$$

1. Sous quelle condition sur f la suite $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ est-elle une sous-martingale, une surmartingale, ou une martingale?
2. Que se passe-t-il si f est la partie réelle d'une fonction analytique?

Problème 2 (4 points)

Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une sous-martingale, et soit

$$\overline{X}_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \;.$$

On note $x^+ = 0 \vee x$ et $\log^+(x) = 0 \vee \log(x)$.

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, différentiable par morceaux. Montrer que pour tout $c \geqslant 0$,
$$\mathbb{E}\big(f(Y)\big) \leqslant f(c) + \int_c^\infty f'(\lambda)\mathbb{P}\big\{Y > \lambda\big\}\,\mathrm{d}\lambda \;.$$
2. Montrer que pour tout $M > 1$,
$$\mathbb{E}\,(\overline{X}_n^+ \wedge M) \leqslant 1 + \mathbb{E}\,(X_n^+ \log^+(\overline{X}_n^+ \wedge M))$$
et en déduire que
$$\mathbb{E}\,(\overline{X}_n^+) \leqslant \frac{1 + \mathbb{E}\,(X_n^+ \log^+(X_n^+))}{1 - \mathrm{e}^{-1}} \;.$$
On pourra utiliser le fait que $a \log b \leqslant a \log a + b/\,\mathrm{e}$ pour tout $a, b > 0$.
3. Montrer que si $\sup_n |X_n| \leqslant Y$ pour une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{E}\,(Y) < \infty$ alors $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable.
4. En déduire que si $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ est une martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}\,(|X_n| \log^+|X_n|) < \infty$, alors $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ converge dans L^1.

Suite au verso

Problème 3 (4 points)

On appelle processus d'Ornstein–Uhlenbeck la solution de l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = -X_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t\;, \qquad X_0 = x\;.$$

1. Résoudre cette équation, c'est-à-dire écrire X_t à l'aide d'une intégrale stochastique d'une fonction explicite.
2. Donner le générateur infinitésimal L de X_t.
3. On se donne $a < 0 < b$. On note τ_a, respectivement τ_b, le temps de premier passage de X_t en a, repectivement b. A l'aide de la formule de Dynkin, exprimer

$$h(x) = \mathbb{P}^{\,x}\{\tau_a < \tau_b\}$$

pour $x \in]a, b[$ comme un rapport de deux intégrales.
4. Etudier $h(x)$ lorsque $\sigma \to 0$, sachant que $\int_a^b \mathrm{e}^{f(y)/\sigma^2}\,\mathrm{d}y \simeq \exp\bigl\{\sup_{y\in[a,b]} f(y)/\sigma^2\bigr\}$.

Problème 4 (9 points)

Le but de ce problème est de montrer, de trois manières différentes, que la première intersection d'un mouvement Brownien bidimensionnel avec une droite suit une loi de Cauchy.

Soient $\{B_t^{(1)}\}_{t\geqslant 0}$ et $\{B_t^{(2)}\}_{t\geqslant 0}$ deux mouvements Browniens standard indépendants. On dénote par $\mathcal{F}_t$ la filtration engendrée par $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$. Soit $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ le processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ donné par

$$X_t = \mathrm{i} + B_t^{(1)} + \mathrm{i}\, B_t^{(2)}\;.$$

Soit

$$\tau = \inf\{t > 0\colon X_t \in \mathbb{R}\} = \inf\{t > 0\colon 1 + B_t^{(2)} = 0\}\;.$$

1. Approche martingale.
   (a) Montrer que $Y_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}$ est une martingale pour tout $\lambda \geqslant 0$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_\tau})$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire la loi de X_τ.
2. Approche principe de réflexion.
   (a) Déterminer la densité de $B_t^{(1)}$.
   (b) En utilisant le principe de réflexion, calculer $\mathbb{P}\{\tau < t\}$ et en déduire la densité de τ. La propriété d'échelle du Brownien permet de simplifier les calculs.
   (c) En déduire la loi de $X_\tau = B_\tau^{(1)}$.
3. Approche invariance conforme.

   On rappelle qu'une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est conforme si elle préserve les angles. On admettra le résultat suivant: le mouvement brownien bidimensionnel est invariant conforme, c'est-à-dire que son image sous une application conforme est encore un mouvement brownien bidimensionnel (à un changement de temps près).

   (a) Soit l'application conforme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

   $$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\;.$$

   Vérifier que c'est une bijection du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ qui envoie i sur 0.
   (b) Par un argument de symétrie, donner la loi du lieu de sortie de $\mathbb{D}$ du mouvement Brownien issu de 0. En déduire la loi de X_τ.