Martingales et calcul stochastique

Examen du 17 janvier 2012

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Les deux problèmes sont indépendants. La plupart des questions peuvent être traitées de manière indépendante.

Problème 1 : La loi de l'arcsinus (10 points)

Soit $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ un mouvement Brownien standard dans $\mathbb{R}$. On considère le processus

$$X_t = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{B_s>0\}}\,\mathrm{d}s\ , \qquad t>0\ .$$

Le but de ce problème est de démontrer la *loi de l'arcsinus* :

$$\mathbb{P}\bigl\{X_t<u\bigr\} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arcsin}\bigl(\sqrt{u}\bigr)\ , \qquad 0\leqslant u\leqslant 1\ . \tag{1}$$

1. Que représente la variable X_t?
2. Montrer que X_t est égal en loi à X_1 pour tout $t>0$.
3. On fixe $\lambda>0$. Pour $t>0$ et $x\in\mathbb{R}$, on définit la fonction

$$v(t,x) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t 1_{\{x+B_s>0\}}\,\mathrm{d}s}\right)$$

et sa transformée de Laplace

$$g_\rho(x) = \int_0^\infty v(t,x)\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}t\ , \qquad \rho>0\ .$$

Montrer que

$$g_\rho(0) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\rho+\lambda X_1}\right)\ .$$

4. Calculer $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)$ à l'aide de la formule de Feynman–Kac.
5. Calculer $g_\rho''(x)$. En déduire que $g_\rho(x)$ satisfait une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre à coefficients constants par morceaux. Montrer que sa solution générale s'écrit

$$g_\rho(x) = A_\pm + B_\pm\,\mathrm{e}^{\gamma_\pm x} + C_\pm\,\mathrm{e}^{-\gamma_\pm x}$$

avec des constantes $A_\pm, B_\pm, C_\pm, \gamma_\pm$ dépendant du signe de x.
6. Déterminer les constantes en utilisant le fait que g_ρ doit être bornée, continue en 0, et que g_ρ' doit être continue en 0. En conclure que $g_\rho(0) = 1/\sqrt{\rho(\lambda+\rho)}$.
7. Démontrer (1) en utilisant l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \sum_{n=0}^\infty (-\lambda)^n \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Suite au verso

Problème 2 : La loi du logarithme itéré (10 points)

Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., centrées, de variance 1. On suppose que la fonction génératrice

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X_1}\right)$$

est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \; .$$

Le but de ce problème est de montrer que presque sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log(\log n)}} \leqslant 1 \; . \tag{2}$$

Dans la suite, on pose $h(t) = \sqrt{2t\log(\log t)}$ pour $t > 1$.

1. Montrer que $\psi(\lambda) = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^2)$.
2. Montrer que $Y_n = \mathrm{e}^{\lambda S_n} / \psi(\lambda)^n$ est une martingale.
3. Montrer que pour tout $N \geqslant 1$ et tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}\left\{\exists n \leqslant N \colon S_n > a + n\frac{\log\psi(\lambda)}{\lambda}\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a} \; .$$
4. On fixe $t, \alpha > 1$. Pour tout $k \geqslant 1$, on pose
$$a_k = \frac{\alpha}{2}h(t^k) \; , \qquad \lambda_k = \frac{h(t^k)}{t^k} \; , \qquad c_k = \frac{\alpha}{2} + t\frac{\log\psi(\lambda_k)}{\lambda_k^2} \; .$$
Montrer que
$$\mathbb{P}\left\{\exists n \in]t^k, t^{k+1}] \colon S_n > h(n)c_k\right\} \leqslant (k\log t)^{-\alpha} \; .$$
5. Montrer que presque sûrement,
$$\mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{h(n)} \leqslant c_k \; \forall n \in]t^k, t^{k+1}], k \to \infty\right\} = 1 \; .$$
6. En utilisant le point 1., montrer que
$$c_k = \frac{\alpha + t}{2} + r(k)$$
avec $\lim_{k\to\infty} r(k) = 0$.
7. Démontrer (2).