Martingales et calcul stochastique

Examen du 20 janvier 2011

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème 1 (8 points)

Un joueur mise sur les résultats des jets indépendants d'une pièce équilibrée. A chaque tour, il mise une somme $S \geqslant 0$. Si la pièce tombe sur Pile, son capital augmente de S, si elle tombe sur Face, le joueur perd sa mise et donc son capital diminue de S.

Une stratégie populaire en France au XVIIIe siècle est appelée *La* Martingale. Elle est définie comme suit:

- le joueur s'arrête de jouer dès qu'il a gagné la première fois (dès le premier Pile);
- il double sa mise à chaque tour, c'est-à-dire qu'il mise la somme $S_n = 2^n$ au $n$ième tour, tant qu'il n'a pas gagné.

Soit Y_n le capital du joueur au temps n (après n jets de la pièce). On admettra que le capital initial est nul, et que le joueur a le droit de s'endetter d'une somme illimitée, c'est-à-dire que Y_n peut devenir arbitrairement négatif. Soit X_n le capital au temps n d'un joueur misant un Euro à chaque tour.

1. Montrer que la stratégie est prévisible, et écrire Y_n sous la forme $Y_n = (H \cdot X)_n$ en fonction du processus $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ est une martingale.
3. Déterminer le processus croissant $\langle Y \rangle_n$. Calculer $\mathbb{E}\left(\langle Y \rangle_n\right)$ et discuter la convergence de Y_n dans L^2.
4. Déterminer l'image de Y_n, sa loi, et discuter la convergence presque sûre de Y_n. Quelle est sa limite?
5. Y_n converge-t-elle dans L^1?

On suppose maintenant que la banque n'admet pas que le joueur s'endette de plus qu'une valeur limite L (on pourra supposer que $L = 2^k$ pour un $k \geqslant 1$). Par conséquent, le joueur est obligé de s'arrêter dès que son capital au temps n est inférieur à $-L + 2^{n+1}$. Notons Z_n ce capital.

6. Soit N la durée du jeu (le nombre de fois que le joueur mise une somme non nulle). Montrer que N est un temps d'arrêt et donner sa loi.
7. Le processus Z_n est-il une martingale?
8. Discuter la convergence presque sûre et dans L^1 de Z_n et commenter les résultats.

Suite au verso

Problème 2 (12 points)

1. On considère une diffusion d'équation

$$\mathrm{d}X_t = f(X_t)\,\mathrm{d}t + g(X_t)\,\mathrm{d}B_t\ .$$

Les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont supposées suffisamment régulières pour assurer l'existence d'une unique solution pour tout temps $t \geqslant 0$.

(a) Calculer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\big(X_t\big)\Big|_{t=0_+} := \lim_{h\to 0_+} \frac{\mathbb{E}^{\,x}\big(X_h\big) - x}{h}\ .$$

(b) Calculer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\Big(\mathrm{e}^{\gamma[X_t - \mathbb{E}^{\,x}(X_t)]}\Big)\Big|_{t=0_+} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg[\mathrm{e}^{-\gamma\mathbb{E}^{\,x}(X_t)}\,\mathbb{E}^{\,x}\Big(\mathrm{e}^{\gamma X_t}\Big)\bigg]\bigg|_{t=0_+}\ .$$

(c) En déduire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}^{\,x}\Big(\big[X_t - \mathbb{E}^{\,x}(X_t)\big]^k\Big)\Big|_{t=0_+}$$

pour $k = 2, 3, \dots$.

2. On se donne une suite d'ensembles dénombrables $\mathcal{X}^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Sur chaque $\mathcal{X}^{(N)}$ on définit une chaîne de Markov $\{Y_n^{(N)}\}_{n\geqslant 0}$, de matrice de transition $P^{(N)}$. On pose

$$v^{(N)}(y) = \mathbb{E}^{\,y}\big(Y_1^{(N)} - y\big) := \sum_{z\in\mathcal{X}^{(N)}} (z-y)P^{(N)}(y,z)$$

et, pour $k = 2, 3, \dots$,

$$m_k^{(N)}(y) = \mathbb{E}^{\,y}\Big([Y_1^{(N)} - \mathbb{E}^{\,y}(Y_1^{(N)})]^k\Big)\ .$$

On définit une suite de processus $\{X_t^{(N)}\}_{t\geqslant 0}$, à trajectoires continues, linéaires par morceaux sur tout intervalle $]k/N, (k+1)/N[$, telles que

$$X_{n/N}^{(N)} = N^{-\alpha}Y_n^{(N)}\ , \qquad n \in \mathbb{N}$$

pour un $\alpha > 0$.

(a) Exprimer, en fonction de $v^{(N)}$ et $m_k^{(N)}$,

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{\mathbb{E}^{\,x}\big(X_h^{(N)} - x\big)}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0_+} \frac{\mathbb{E}^{\,x}\big([X_h^{(N)} - \mathbb{E}^{\,x}(X_h^{(N)})]^k\big)}{h}\ .$$

(b) Donner des conditions nécessaires sur les $v^{(N)}$ et $m_k^{(N)}$ pour que la suite des $X_t^{(N)}$ converge vers la diffusion X_t.

3. Montrer que ces conditions sont vérifiées, pour un α approprié, dans le cas où chaque $Y^{(N)}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $X_t = B_t$ est le mouvement Brownien.

4. On rappelle que le modèle d'Ehrenfest à N boules est la chaîne de Markov $Y_n^{(N)}$ sur $\{0, 1, \dots, N\}$ de probablités de transition

$$P^{(N)}(y, y-1) = \frac{y}{N}\ , \qquad P^{(N)}(y, y+1) = 1 - \frac{y}{N}\ .$$

En supposant que la suite de processus définis par

$$X_{n/N}^{(N)} = N^{-1/2}\bigg(Y_n^{(N)} - \frac{N}{2}\bigg)\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ ,$$

converge vers une diffusion X_t, déterminer les coefficients $f(x)$ et $g(x)$ de cette diffusion.