Martingales et calcul stochastique

Examen du 6 janvier 2010

Durée: 3 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Il est demandé de résoudre les problèmes 1, 2, 3 et *soit 4a, soit 4b* (indiquer clairement votre choix).
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème 1 (3 points)

On se donne $r, \alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}Y_t = r\,\mathrm{d}t + \alpha Y_t\,\mathrm{d}B_t\ , \qquad Y_0 = 1\ .$$

Indication : Soit le "facteur intégrant"

$$F_t = \exp\biggl\{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\biggr\}\ .$$

Considérer $X_t = F_t Y_t$.

Problème 2 (7 points)

Soit $\{B_t\}_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien standard. Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ une partition de $[0,T]$, et soit

$$e_t = \sum_{k=1}^{N} e_{t_{k-1}} 1_{[t_{k-1},t_k)}(t)$$

une fonction simple, adaptée à la filtration canonique du mouvement Brownien.

L'intégrale de Stratonovich de e_t est définie par

$$\int_0^T e_t \circ \mathrm{d}B_t = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_{t_k} + e_{t_{k-1}}}{2} \Delta B_k \qquad \text{où } \Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\ .$$

L'intégrale de Stratonovich $\int_0^T X_t \circ \mathrm{d}B_t$ d'un processus adapté X_t est définie comme la limite de la suite $\int_0^T e_t^{(n)} \circ \mathrm{d}B_t$, où $e^{(n)}$ est une suite de fonctions simples convergeant vers X_t dans L^2. On admettra que cette limite existe et est indépendante de la suite $e^{(n)}$.

1. Calculer
$$\int_0^T B_t \circ \mathrm{d}B_t\ .$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, et soit X_t un processus adapté satisfaisant
$$X_t = \int_0^t g(X_s) \circ \mathrm{d}B_s \qquad \forall t \in [0,T]\ .$$
Soit Y_t l'intégrale d'Itô
$$Y_t = \int_0^t g(X_s)\,\mathrm{d}B_s\ .$$
Montrer que
$$X_t - Y_t = \frac{1}{2}\int_0^t g'(X_s)g(X_s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0,T]\ .$$

Problème 3 (3 points)

Un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ est un processus $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ tel que

i. $N_0 = 0$;
ii. pour $t > s \geqslant 0$, $N_t - N_s$ est indépendant de N_s;
iii. pour $t > s \geqslant 0$, $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$:

$$\mathbb{P}\{N_t - N_s = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} , \qquad k \in \mathbb{N} .$$

On se donne des variables aléatoires i.i.d. $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de carré intégrables. Soit

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k .$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X_t)$.
2. Calculer $\operatorname{Var}(X_t)$.

Problème 4a (7 points)

Soit $X_0 = 1$. On définit une suite $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ récursivement en posant que pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi uniforme sur $]0, 2X_{n-1}]$ (c-à-d $X_n = 2U_nX_{n-1}$ où les U_n sont i.i.d. de loi uniforme sur $]0,1]$).

1. Montrer que X_n est une martingale.
2. Calculer le processus croissant $\langle X\rangle_n$ et discuter la convergence de X_n dans L^2.
3. Discuter la convergence presque sûre de X_n.
4. Déterminer la limite presque sûre de X_n.
   Indication : Considérer $Y_n = \log(X_n)$ ainsi que $Z_n = Y_n - \mathbb{E}(Y_n)$.
5. Discuter la convergence de X_n dans L^1.

Problème 4b (7 points)

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément lipschitzienne. Soit $I_{k,n} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ et soit $\mathcal{F}_n$ la tribu sur $\Omega = [0,1]$ engendrée par les $I_{k,n}$ pour $k = 0, \dots, 2^n - 1$.

On pose

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} 1_{\{U\in I_{k,n}\}} .$$

1. Montrer que X_n est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.
2. Montrer que X_n converge presque sûrement. On note la limite X_∞.
3. Discuter la convergence de X_n dans L^1.
4. Montrer que pour tout $0 \leqslant a < b \leqslant 1$,

$$\mathbb{E}\left(X_\infty 1_{\{U\in[a,b]\}}\right) = f(b) - f(a) .$$

5. On suppose f de classe C^1. A l'aide de 4., expliciter $X_\infty(\omega)$ (si l'on note $U(\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$).