Martingales et calcul stochastique

Examen du 20 janvier 2009

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = X \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$$

1. Calculer $\mathrm{Var}(Y - X|\mathcal{G})$.
2. En déduire $\mathrm{Var}(Y - X)$.
3. Que peut-on en déduire sur la relation entre X et Y?

Exercice 2 (8 points)

Un joueur dispose initialement de la somme $X_0 = 1$. Il joue à un jeu de hasard, dans lequel il mise à chaque tour une proportion λ de son capital, avec $0 < \lambda \leqslant 1$. Il a une chance sur deux de gagner le double de sa mise, sinon il perd sa mise.

L'évolution du capital X_n en fonction du temps n est décrite par

$$X_{n+1} = (1 - \lambda)X_n + \lambda X_n \xi_n \qquad (n \geqslant 0)$$

où les ξ_n sont i.i.d., avec $\mathbb{P}\{\xi_n = 2\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1/2$.

1. Montrer que X_n est une martingale.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
3. Discuter la convergence presque sûre de X_n lorsque $n \to \infty$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ par récurrence sur n.
5. Que peut-on en déduire sur la convergence dans L^2 de X_n?
6. Déterminer le processus croissant $\langle X \rangle_n$.
7. On suppose que le joueur mise à chaque tour la totalité de son capital, c'est-à-dire $\lambda = 1$.
   (a) Calculer explicitement la loi de X_n.
   (b) Déterminer la limite presque sûre de X_n.
   (c) Discuter la convergence de X_n dans L^1.
   Les X_n sont-ils uniformément intégrables?
   (d) Commenter ces résultats - est-ce que vous joueriez à ce jeu?

Exercice 3 (8 points)

1. Soit Y une variable aléatoire normale centrée, de variance σ^2. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^Y\right) = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}$$

2. Soit B_t un mouvement Brownien standard, et $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction indépendante de B_t. Pour $t \in [0,T]$ on pose
$$X_t = \int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}B_s$$
Calculer $\mathbb{E}\left(X_t\right)$ et $\operatorname{Var} X_t$. On précisera les hypothèses faites sur la fonction φ.

3. Montrer que
$$M_t = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(s)^2\,\mathrm{d}s\right\}$$
est une martingale.

4. Démontrer l'*inégalité de Bernstein* : Pour tout $\lambda > 0$,
$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s > \lambda\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\Phi(t)}\right\}$$
où $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi(s)^2\,\mathrm{d}s$.