Master 2 de Mathématiques - Processus aléatoires

Examen du 17 décembre 2007

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.
Pour obtenir 20 points, il est demandé de résoudre les exercices 1, 2 et 3, et *au choix, soit le problème I, soit le problème II.*

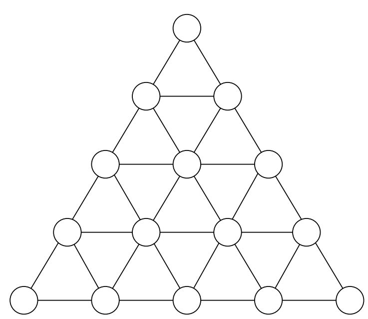
Exercice 1 (4 points)

On considère une chaîne de Markov sur $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/16 & 7/16 & 0 & 1/2 \\ 1/16 & 0 & 7/16 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

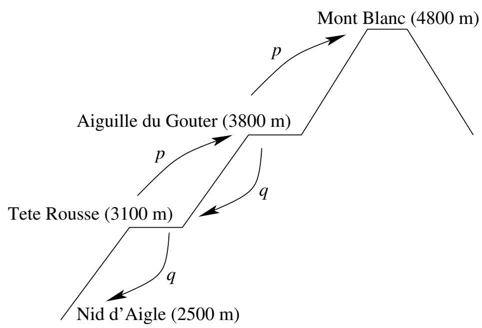
1. Montrer que cette chaîne est irréductible.
2. Calculer sa distribution stationnaire.
3. La chaîne est-elle réversible?
4. Calculer le temps de récurrence moyen vers l'état 1.

Exercice 2 (4 points)



Une puce se déplace sur le réseau ci-dessus, en choisissant à chaque saut l'une des cases adjacentes, au hasard de manière uniforme. Déterminer le temps de récurrence moyen vers le coin inférieur gauche (justifier soigneusement la réponse!).

Exercice 3 (4 points)



Un alpiniste veut faire l'ascension du Mont Blanc. Lors de son ascension, il décide de passer la nuit au refuge de Tête Rousse, et également au refuge de l'Aiguille du Goûter. Chaque matin, il observe la météo. Si celle-ci lui paraît bonne, alors il poursuit son ascension jusqu'à l'étape suivante. Par contre, si la météo semble mauvaise, il redescend d'une étape. On suppose que l'alpiniste est initialement au refuge de Tête Rousse, et que s'il est obligé de redescendre au Nid d'Aigle, alors il abandonne son projet d'ascension. Enfin, on suppose que la météo est bonne avec probabilité p, et mauvaise avec probabilité $q = 1 - p$, et indépendante de la météo des jours précédents.

1. Montrer que le problème peut être décrit par une chaîne de Markov absorbante, et calculer sa matrice fondamentale.
2. Calculer, en fonction de p, la probabilité que l'alpiniste atteigne le sommet.
3. Déterminer la valeur $p^\star$ de p pour qu'il ait une chance sur deux d'atteindre le sommet.
4. Calculer le nombre moyen de jours de l'ascension pour $p = p^\star$.

Problème I (8 points)

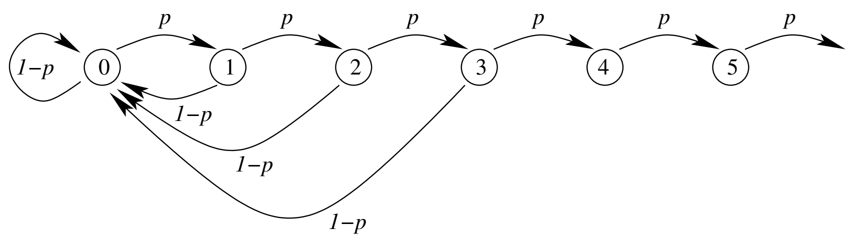
On considère une marche aléatoire symétrique sur $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$, avec conditions au bord absorbantes, c'est-à-dire que dès que la marche atteint l'un des états 0 ou N, elle y reste indéfiniment. Soit

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\}$$

le temps d'absorption. Par convention, $\tau = 0$ si $X_0 \in \{0, N\}$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$\mathbb{P}_i\{\tau = n\} = \frac{1}{2}\big[\mathbb{P}_{i-1}\{\tau = n-1\} + \mathbb{P}_{i+1}\{\tau = n-1\}\big] .$$
2. Soit $f(i) = \mathbb{E}_i(\tau)$. Que valent $f(0)$ et $f(N)$?
3. Déduire de 1. que
$$f(i) = \frac{1}{2}\big[f(i-1) + f(i+1)\big] + 1 . \qquad (1)$$
4. Montrer que $f(i) = -i^2$ satisfait l'équation (1).
5. Une fonction $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si
$$g(i) = \frac{1}{2}\big[g(i-1) + g(i+1)\big] \qquad \forall i \in \mathcal{X} .$$
Montrer que si f satisfait (1) et g est harmonique, alors $f + g$ satisfait (1).
6. Montrer que si f_1 et f_2 satisfont (1), alors $f_1 - f_2$ est harmonique. Déduire du principe du maximum que si f_1 et f_2 coïncident en 0 et en N, alors elles sont égales partout.
7. Sachant que les fonctions linéaires sont harmoniques, déterminer $\mathbb{E}_i(\tau)$.

Problème II (8 points)



On considère une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de probabilités de transition

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \;, \\ 1-p & \text{si } j = 0 \;, \\ 0 & \text{sinon} \;. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible?
   Pour le reste du problème, on suppose que p est tel que la chaîne soit irréductible.
2. On suppose $X_0 = 0$. Soit
   $$\tau_0 = \inf\{n > 0 \colon X_n = 0\}$$
   le temps de premier retour en 0. Montrer que
   $$\tau_0 = n \quad \Rightarrow \quad X_m = m \;, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1 \;.$$
   En déduire la loi de τ_0.
3. Montrer que l'état 0 est récurrent.
4. Montrer que l'état 0 est récurrent positif.
5. Montrer que l'état 0 est apériodique.
6. Soit π l'unique distribution stationnaire de la chaîne. Calculer π_0 à l'aide de $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
7. Exprimer π_i en fonction de π_{i-1} et en déduire π_i pour tout i.