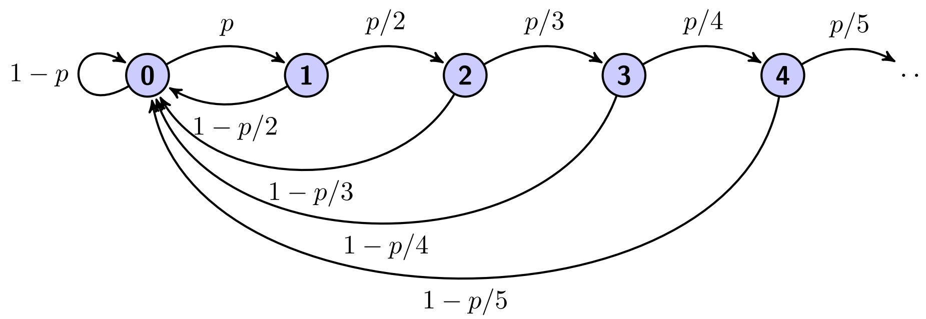
Probabilités

Examen du 17 décembre 2013

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème 1 (10 points)

1. Soit $p \in [0,1]$ et soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont le graphe est le suivant:



   (a) Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible?
   On suppose dans la suite que p est tel que la chaîne soit irréductible.

   (b) L'état 0 est-il récurrent?

   (c) L'état 0 est-il récurrent positif?

   (d) Déterminer la distribution de probabilité stationnaire de la chaîne.

2. Soit $p \in [0,1]$. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$Y_{n+1} - Y_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p \, , \\ -1 & \text{avec probabilité } 1-p \, . \end{cases}$$

   (a) Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle irréductible?
   On suppose dans la suite que p est tel que la chaîne soit irréductible.

   (b) Calculer $\mathbb{P}_0\{Y_{2n} = 0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}_0\{Y_{2n} = 0\}$ pour $n \to \infty$.

   (d) Pour quelles valeurs de p la chaîne est-elle récurrente? transiente?

   On rappelle la formule de Stirling :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 \, .$$

Suite au verso

Problème 2 (10 points)

Soit $(U_i)_{i \geqslant 1}$ une famille de variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_0 = 1$ et

$$X_n = 2^n \prod_{i=1}^{n} U_i \ , \qquad n \geqslant 1 \ .$$

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ la filtration canonique associée à $(X_n)_{n \geqslant 0}$. On dénote par $\log(x) = \ln(x)$ le logarithme naturel de $x > 0$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

2. Montrer que X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.

3. Pour tout $i \geqslant 1$ on pose $V_i = 1 + \log(U_i)$.

   (a) Calculer $\mathbb{E}\,(V_1)$.

   (b) Montrer que $\mathbb{E}\,(\mathrm{e}^{\gamma V_1}) = \mathrm{e}^{\gamma} / (\gamma + 1)$ pour tout $\gamma > 0$.
   En déduire une majoration de $\mathbb{P}\,\{\mathrm{e}^{\gamma V_1} > \mathrm{e}^{\gamma c}\}$ pour $c \in \mathbb{R}$.

   (c) En faisant un choix approprié de γ, en déduire que

   $$\mathbb{P}\,\{V_1 > c\} \leqslant (1 - c)\,\mathrm{e}^{c}$$

   pour tout $c \in]0,1[$.

   (d) Soit $Z_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Par un raisonnement similaire à celui du point (c), trouver une majoration de $\mathbb{P}\,\{Z_n > cn\}$ pour $c \in]0,1[$.

   (e) En déduire que pour tout $c > 0$

   $$\limsup_{n \to \infty} \frac{Z_n}{n} < c$$

   presque sûrement.

4. On pose $Y_n = \log(X_n)$.

   (a) Exprimer Y_{n+1} en fonction de Y_n et en déduire

   $$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\,(Y_n) \ .$$

   (b) Exprimer Y_n en fonction de Z_n. En déduire la limite presque sûre de Y_n, puis celle de X_n lorsque $n \to \infty$.