Probabilités et statistiques

Examen du 10 mai 2012

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème 1 (4 points)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité jointe

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{xy}} & \text{si } 0 < y < x < 1 \;, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Calculer les marginales $f_1(x)$ et $f_2(y)$. En déduire la valeur de C.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Problème 2 (6 points)

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on note

$$L_X(u) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-uX}) \;, \qquad u > 0$$

sa transformée de Laplace.

1. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle, de paramètre $\lambda > 0$.
   Calculer $L_Y(u)$.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, indépendante de Y. On suppose que X admet une densité $f_X(x)$.
   (a) Donner la densité du couple (X, Y).
   (b) Montrer que $\mathbb{P}\{Y > X\} = L_X(\lambda)$.
3. On se donne maintenant n variables aléatoires i.i.d. à densité $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose $(X_1, \dots, X_n, Y)$ indépendantes. Montrer que
$$\mathbb{P}\left\{Y > X_1 + \dots + X_n\right\} = \mathbb{P}\left\{Y > X_1\right\} \dots \mathbb{P}\left\{Y > X_n\right\} .$$
4. Soit $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
   (a) Montrer que
$$\mathbb{P}\left\{2M > X_1 + \dots + X_n\right\} = n\mathbb{P}\left\{X_1 > X_2 + \dots + X_n\right\} .$$
   (b) On suppose que $X_1, \dots, X_n$ suivent une loi exponentielle de paramètre λ.
      i. Calculer $\mathbb{P}\{X_1 > X_2\}$.
      ii. En déduire une expression explicite de $\mathbb{P}\{2M > X_1 + \dots + X_n\}$.

Tournez s.v.p.

Problème 3 (5 points)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la densité de $Y = \mathrm{e}^{X_1}$.
2. Comment s'appelle la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$? (On ne demande pas de faire de calculs).
3. Pour quelles valeurs de $u \in \mathbb{R}$ a-t-on $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{uX_1}\right) < \infty$? Calculer sa valeur, et en déduire
$$f_n(u) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{uS_n}\right)$$
pour tout $n \geqslant 1$.
4. Déterminer $f'_n(u)$, puis par récurrence toutes les dérivées de f_n.
5. En déduire $\mathbb{E}\left(S_n^k\right)$ pour tout $k \geqslant 1$.

Problème 4 (5 points)

1. On dispose d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in [0, 1]$.
   (a) Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
   (b) Cet estimateur est-il biaisé? Est-il consistant?
2. Déterminer un intervalle de confiance pour θ, pour un coefficient de sécurité $\beta = 0.95$.

   On rappelle que la fonction de distribution de la loi normale standard Φ vérifie $\Phi(1.96) \simeq 0.975$.
3. Un sondage effectué sur un échantillon de $n = 1000$ personnes révèle 480 personnes d'opinion A, et 520 personnes d'opinion B.
   (a) Donner un intervalle de confiance à 95% pour la proportion d'opinions A (on pourra se contenter d'une valeur approchée à 0.01 près).
   (b) Sur combien de personnes le sondage devrait-il porter pour obtenir un intervalle de confiance de taille 2% ?
   (c) Si $n = 1000$, combien devrait-on avoir d'opinions A pour qu'on puisse rejeter l'hypothèse nulle H_0 : "il y a plus d'opinions A que d'opinions B" avec un niveau de confiance de 95% ?