Probabilités et statistiques

Examen du 4 mai 2011

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème 1 (6 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la densité du couple (X, Y) est donnée par f, avec

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{si } 0 < x < y \;, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Calculer les densités marginales f_1 de X et f_2 de Y.
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes?
4. Calculer
$$\mathbb{P}\left\{\frac{X}{Y} \leqslant z \text{ et } Y \leqslant t\right\}$$
pour $z \in [0,1]$. En déduire la loi de X/Y.
5. Les variables X/Y et Y sont-elles indépendantes?

Problème 2 (6 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner la densité conjointe du couple (X, Y).
2. Soit $Z = Y/X$. Déterminer la densité conjointe du couple (X, Z).
3. Déterminer la densité de Z.
4. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ l'espérance $\mathbb{E}\left((1+Z)^\alpha\right)$ existe-t-elle?
Calculer $\mathbb{E}\left((1+Z)^\alpha\right)$ pour ces α.
5. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la covariance de X et $(1+Z)^\alpha$ existe-t-elle?
Calculer sa valeur pour ces α.

Tourner s.v.p.

Problème 3 (6 points)

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $G_N(z) = \mathbb{E}\left(z^N\right)$ sa fonction génératrice. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes de N. Soit $G_X(z) = \mathbb{E}\left(z^X\right)$ leur fonction génératrice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \ .$$
Ecrire la fonction génératrice $\mathbb{E}\left(z^{S_n}\right)$ de S_n en fonction de $G_X(z)$.

2. Soit
$$S_N = X_1 + \cdots + X_N \ .$$
Montrer que sa fonction génératrice $G_S(z) = \mathbb{E}\left(z^{S_N}\right)$ est donnée par
$$G_S(z) = G_N(G_X(z)) \ .$$

3. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et que les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Déterminer la loi de S_N.

Problème 4 (6 points)

On se donne $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire réelle de densité
$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\, \mathrm{e}^{-(\log x - \mu)^2/(2\sigma^2)}\, 1_{\{x>0\}} \ .$$

1. Montrer que $f_{\mu,\sigma}$ définit bien une densité.

2. Calculer
$$\mathbb{E}\left(\log(X)\right) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left((\log(X))^2\right) \ .$$

3. On observe un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables indépendantes de même loi que X. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ du couple (μ, σ).

4. Calculer le biais $\mathbb{E}\left(\hat{\mu}\right) - \mu$ de l'estimateur $\hat{\mu}$.

5. Calculer le risque quadratique de l'estimateur $\hat{\mu}$ et montrer que c'est un estimateur consistant de μ.