Probabilités et statistiques

Examen du 19 mai 2010

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème 1 (8 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta > 0$. On rappelle qu'une variable aléatoire réelle Y suit la loi $\gamma(n, \theta)$ si elle admet la densité

$$f_Y(t) = \frac{\theta^n}{(n-1)!} t^{n-1} \,\mathrm{e}^{-\theta t} \, 1_{\{t>0\}}$$

(on pose $0! = 1$).

1. Déterminer sans faire de calcul
$$\int_0^\infty t^{n-1} \,\mathrm{e}^{-\theta t} \,\mathrm{d}t \; .$$

2. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que Y_1 suit une loi $\gamma(n, \theta)$ et Y_2 suit une loi $\gamma(1, \theta)$ (loi exponentielle).
   (a) Déterminer la loi de $Y_1 + Y_2$.
   (b) En déduire la loi de la somme de N variables i.i.d. de loi $\gamma(1, \theta)$.

3. Soit X une variable aléatoire réelle de densité
$$f_X(t) = \theta t^{\theta-1} 1_{\{0<t<1\}} \; .$$
Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

4. Déterminer la loi de $Z = \log(1/X) = -\log(X)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

5. On observe un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables indépendantes de même loi que X. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance W_n de θ.

6. Calculer le biais $\mathbb{E}(W_n) - \theta$ de l'estimateur.

7. Montrer que W_n est un estimateur consistant de θ et qu'il converge en moyenne quadratique vers θ.

Tourner s.v.p.

Problème 2 (12 points)

1. Soit Z_1 une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

   (a) Quelle est la densité de Z_1?

   (b) Pour tout $t > 0$ on pose $N_1(t) = 1_{\{Z_1 \leqslant t\}}$. Donner l'image de $N_1(t)$ et la loi de $N_1(t)$.

2. Soit Z_2 une variable aléatoire réelle indépendante de Z_1, et de même loi que Z_1.

   (a) Donner la densité conjointe de (Z_1, Z_2).

   (b) On pose $X_1 = Z_1$ et $X_2 = Z_1 + Z_2$. Déterminer la densité conjointe de (X_1, X_2).

   (c) Calculer les densités marginales de X_1 et de X_2.

   (d) On pose $N_2(t) = 1_{\{X_1 \leqslant t\}} + 1_{\{X_2 \leqslant t\}}$. Donner l'image de $N_2(t)$ et la loi de $N_2(t)$.

3. **On considère maintenant le cas général de n variables exponentielles. En cas de difficultés, commencez par traiter le cas $n = 3$.**

   Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. Pour $k = 1, \dots n$, on pose

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i \ , \qquad N_k(t) = \sum_{i=1}^{k} 1_{\{X_i \leqslant t\}} \ .$$

   (a) Déterminer la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$.
   Que vaut $\mathbb{P}\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$?

   (b) Déterminer la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_{n-1})$ (marginale par rapport à X_n), puis la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_k)$ pour tout $k = 2, \dots, n-2$.

   (c) Déterminer la loi conjointe de $(X_2, \dots, X_k)$ (marginale par rapport à X_1), puis la loi conjointe de $(X_l, \dots, X_k)$ pour tout $l = 3, \dots, k-1$.

   (d) Montrer que $\mathbb{P}\{N_n(t) = k\} = \mathbb{P}\{X_k \leqslant t, X_{k+1} > t\}$ pour $k = 1, \dots, n-1$.

   (e) Déterminer la loi de $N_n(t)$, puis celle de $\lim_{n\to\infty} N_n(t)$.