# Modélisation-Probabilités

## Examen du 10 janvier 2018

*Durée:* 2 heures

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction. Tous les arguments doivent être soigneusement justifiés.

Les points sont donnés à titre indicatif.

**Problème 1 [8 points]**

1. Soit $X$ une variable aléatoire de loi normale, centrée, de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer que pour toute fonction dérivable $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)} = 0 ,$$
on a
$$\mathbb{E}\bigl(XF(X)\bigr) = \sigma^2\mathbb{E}\bigl(F'(X)\bigr) .$$

2. On se donne maintenant des variables aléatoires réelles $X_1,\dots,X_n$. Chaque $X_i$ suit une loi normale centrée. On ne suppose pas les $X_i$ indépendantes, et on note $C_{ij} = \mathbb{E}\bigl(X_iX_j\bigr) - \mathbb{E}\bigl(X_i\bigr)\mathbb{E}\bigl(X_j\bigr) = \mathbb{E}\bigl(X_iX_j\bigr)$ leurs covariances. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Montrer que sous des hypothèses adéquates sur $F$, que l'on spécifiera, on a pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$
$$\mathbb{E}\bigl(X_iF(X)\bigr) = \sum_{j=1}^n C_{ij}\mathbb{E}\biggl(\frac{\partial F}{\partial X_j}(X)\biggr) .$$
**Rappel :** La densité du vecteur $(X_1,\dots,X_n)$ est proportionnelle à $\mathrm{e}^{-\langle x,C^{-1}x\rangle/2}$, où $C$ est la matrice d'éléments $C_{ij}$.

3. En appliquant le résultat précédent à $F(X) = X_2X_3X_4$, exprimer $\mathbb{E}\bigl(X_1X_2X_3X_4\bigr)$ en fonction des $C_{ij}$. Faire de même pour $\mathbb{E}\bigl(X_1X_2X_3\bigr)$.

4. On suppose que $n$ est impair. Calculer par récurrence $\mathbb{E}\bigl(\prod_{i=1}^n X_i\bigr)$.

5. Dans toute la suite, on suppose que $n = 2m$ est pair. Un *appariement* de $\{1,\dots,2m\}$ est une partition de $\{1,\dots,2m\} = \{i_1,j_1\}\bigcup\dots\bigcup\{i_m,j_m\}$ en $m$ ensembles disjoints deux à deux de 2 éléments chacun.
Soit $N(2m)$ le nombre d'appariements de $\{1,\dots,2m\}$. Déterminer $N(2)$, $N(4)$, puis $N(2m+2)$ en fonction de $N(2m)$.

6. Démontrer le théorème d'Isserlis–Wick :
$$\mathbb{E}\bigl(X_1\cdots X_{2m}\bigr) = \sum_{\substack{\text{appariements}\\ \text{de }\{1,\dots,2m\}}} \Biggl[\prod_{\ell=1}^m C_{i_\ell j_\ell}\Biggr] .$$

7. On suppose que $X_1 = X_2 = \dots = X_n$, et on pose $\mathbb{E}\bigl(X_1^2\bigr) = \sigma^2$. Déduire $\mathbb{E}\bigl(X^n\bigr)$ des trois points précédents.

*Suite au verso*

**Problème 2 [4 points]**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un espace probabilisé filtré et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathcal{F}_n$-martingale à valeurs positives. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$\overline{X}_N = \max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \; .$$

On fixe $N \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$. Soit $A$ l'événement $A = \{\overline{X}_N \geqslant \lambda\}$ et soit $T$ le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} \colon X_n \geqslant \lambda\} \wedge N$$

(on rappelle la notation $a \wedge b = \min\{a, b\}$).

1. Montrer que $\lambda\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A)$.
2. Montrer que $T = N$ sur $\Omega \setminus A$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_A)$.
3. En déduire l'*inégalité de Doob*:

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_N \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_N) \; .$$

**Problème 3 [8 points]**

Soit $M > 0$. On se donne deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels satisfaisant $0 < a_n \leqslant M$ et $0 < \sigma_n \leqslant M$ pour tout $n$. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que $Z_n$ suive une loi normale centrée de variance $\sigma_n^2$. Enfin on définit par récurrence une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires en posant $X_0 = 0$ et

$$X_{n+1} = a_n X_n + Z_{n+1} \qquad \forall n \geqslant 0 \; .$$

1. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma Z_n})$ pour $\gamma > 0$.
2. Quelle est la filtration naturelle associée au processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ?
3. Sous quelle condition $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle une martingale ?
4. On pose $b_0 = 1$ et $b_n = \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ pour $n \geqslant 1$. Soit $Y_n = X_n/b_n$. Déterminer une relation de récurrence pour les $Y_n$, et montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.
5. Déterminer le processus croissant $(\langle Y\rangle_n)_{n\geqslant 0}$ associé à $(Y_n)_{n\geqslant 0}$.
   **Rappel :** $\langle Y\rangle_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big((Y_i - Y_{i-1})^2 \bigm| \mathcal{F}_{i-1}\big)$.
6. Soit $\gamma > 0$. On pose $U_n = \exp(\gamma Y_n - \frac{1}{2}\gamma^2\langle Y\rangle_n)$. Montrer que $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale. Que vaut $\mathbb{E}(U_n)$ ?
7. Donner une condition sur les $\sigma_n$ et les $b_n$ pour que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement et dans $L^2$.
8. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$. Majorer

$$\mathbb{P}\biggl\{\max_{1\leqslant n\leqslant N} Y_n \geqslant \lambda\biggr\}$$

   en appliquant l'inégalité de Doob à $(U_n)_{n\geqslant 0}$.
   Quelle majoration obtient-on en optimisant sur $\gamma$ ?