M4-3 - Probabilités

Examen du 5 avril 2007

Durée: 3 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont autorisés.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Problème I (5 points)

Soient X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires exponentielles, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} = \mathrm{e}^{-\lambda_n x} \qquad \forall x \geqslant 0 \; .$$

1. Déterminer sous quelle condition sur les λ_n la suite des X_n converge vers 0 en probabilité lorsque $n \to \infty$.

2. Déterminer sous quelle condition sur les λ_n la suite des X_n converge vers 0 dans L_p lorsque $n \to \infty$.

3. Montrer que s'il existe une suite $\varepsilon_n \searrow 0$ telle que

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-\lambda_n \varepsilon_n} < +\infty \; ,$$

   alors $X_n \to 0$ presque sûrement lorsque $n \to \infty$.

4. Montrer que si les X_n sont indépendantes et

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-\lambda_n} = +\infty \; ,$$

   alors $X_n \not\to 0$ presque sûrement lorsque $n \to \infty$.

5. Déterminer dans quels sens X_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ pour $\lambda_n = n^2$, pour $\lambda_n = n$ et pour $\lambda_n = \log n$.

Problème II (15 points)

Soit $\mathcal{X} = \{1, \dots, M\}$ un ensemble fini. On considère une chaîne de Markov sur $\mathcal{X}$ de matrice de transition $P = (p_{i,j})$. On suppose que P est irréductible.

1. On dit que la chaîne est *réversible* s'il existe un vecteur non nul $m \in \mathbb{R}^M$ tel que

$$m_i p_{i,j} = m_j p_{j,i} \qquad \forall i,j \in \mathcal{X} \; .$$

   Montrer que si la chaîne est réversible, alors w donné par

$$w_i = \frac{m_i}{\sum_{j \in \mathcal{X}} m_j}$$

   est une distribution stationnaire de la chaîne.

2. Montrer que si la chaîne est réversible de distribution stationnaire w, alors

$$\mathbb{P}_w\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \mathbb{P}_w\{X_0 = i_n, X_1 = i_{n-1}, \dots, X_n = i_0\} \; .$$

Suite au verso

3. On considère une chaîne (toujours supposée irréductible) telle que $p_{i,j}$ ne peut admettre que deux valeurs différentes pour tout i:

$$p_{i,j} \in \{0, q_i\} \quad \forall i, j \in \mathcal{X} \ .$$

Montrer que $q_i > 0$. Déterminer, en fonction de q_i, le nombre n_i de j tels que $p_{i,j} \neq 0$. Montrer que si la chaîne est réversible, alors $n_i p_{i,j} = n_j p_{j,i}$ pour tout i, j et en déduire la distribution stationnaire de la chaîne.

4. La marche aléatoire symétrique avec conditions au bord périodiques est définie par $p_{i,i+1} = p_{i+1,i} = 1/2$ pour $i = 1, \dots M$ et $p_{1,M} = p_{M,1} = 1/2$. Montrer que cette chaîne est réversible et calculer sa distribution invariante.

5. La marche aléatoire asymétrique avec conditions au bord périodiques est définie par $p_{i,i+1} = 1 - p_{i+1,i} = q$ pour $i = 1, \dots M$ et $1 - p_{1,M} = p_{M,1} = q$ (avec $q \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$). Montrer que cette chaîne n'est pas réversible.

6. La marche aléatoire symétrique avec réflexions au bord est définie par $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ pour $i = 2, \dots, M-1$ et $p_{1,2} = p_{M,M-1} = 1$. Calculer sa distribution stationnaire et le temps de récurrence moyen pour chaque site.

7. Un roi se déplace sur un échiquier en choisissant au hasard, de manière équiprobable, l'une des cases adjacentes. Calculer le temps de récurrence moyen vers le coin inférieur gauche de l'échiquier.

   Même question pour un fou, qui ne se déplace qu'en diagonale, mais à une distance arbitraire.

   Dans les deux cas, on suppose que les pièces ne peuvent pas rester au même endroit d'un coup au suivant.

8. On décrit le modèle d'Ehrenfest, de manière différente du cours, par une chaîne de Markov sur $\mathcal{X} = \{0,1\}^N$. Dans une configuration $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, la composante η_i vaut 0 si la $i$ème boule est dans l'urne de gauche, 1 si elle est dans l'urne de droite. A chaque temps, on choisit une boule au hasard de manière équiprobable, et on la change d'urne. Montrer que ce processus est décrit par une chaîne de Markov réversible et déterminer sa distribution stationnaire.