Licence 3 de Mathématiques
Équations différentielles ordinaires

Contrôle continu du 28 février 2024 – Corrigé

Questions de cours 1 (3 points)**.**

1. «f satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz » signifie que f est continue, et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.
   (Plus précisément, pour tout $(t_0, y_0) \in J \times U$, il existe $C_0 \subset J \times U$, de la forme $C_0 = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(y_0, R)$ avec $a, R > 0$, et il existe $K > 0$ tel que
   $$\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a] \ , \forall x, y \in \bar{B}(y_0, R) \ , \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant K\|x - y\| \ .$$
   Ici $\bar{B}(y_0, R) = \{y \in U \colon \|y - y_0\| \leqslant R\}$ désigne la boule fermée de centre y_0 et rayon R.)
2. Une solution $y : I \to U$, avec $I \subset J$, est maximale, si pour toute solution $y_1 : I_1 \to U$ telle que $I \subset I_1$ (c'est-à-dire telle que y_1 prolonge y), on a $I = I_1$.
3. **Lemme des bouts :** Soit $y :]t_-, t_+[\to U$ une solution (avec $]t_-, t_+[\subset J$ et $t_\pm$ finis). Alors y est maximale à droite si et seulement si
   - soit $t_+ = \sup J$,
   - soit $t_+ < \sup J$ et, lorsque $t \to t_+$, $y(t)$ sort définitivement de tout compact de J (c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset U$, il existe un temps $\alpha_K \in]t_-, t_+[$ tel que $y(t) \notin K \ \forall t \in [\alpha_K, t_+[$).

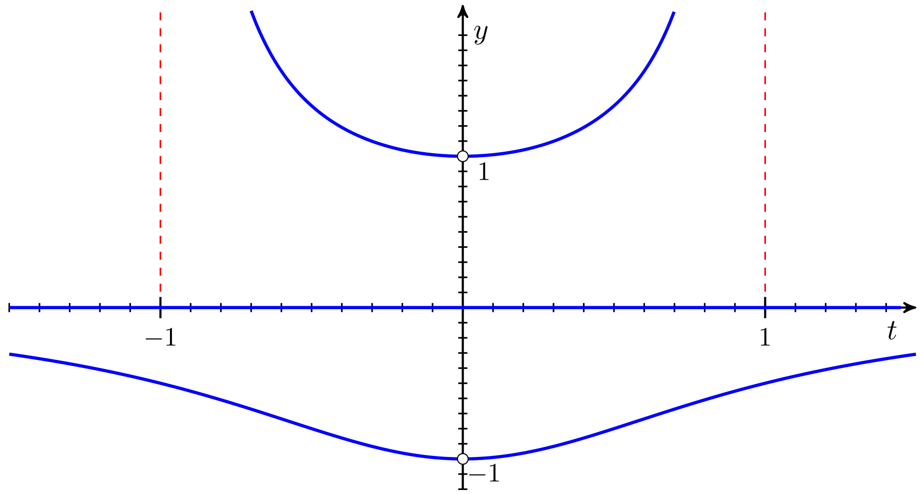
   On a une propriété analogue pour les solutions maximales à gauche.

Exercice 1 (4 points)**.**

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t,y) = 2ty^2$.
   - f est continue, et sa dérivée par rapport à y vaut $4ty$, qui est continue. Ceci implique en particulier qu'elle est localement Lipschitzienne par rapport à y. Elle satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz. (En fait, f est même de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui est une condition suffisante pour qu'elle satisfasse les hypothèses du théorème.)
   - En procédant par séparation des variables, on obtient
   $$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_0^t 2s \, \mathrm{d}s$$
   $$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = t^2 \ ,$$
   ce qui donne
   $$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t^2} = \frac{y_0}{1 - y_0 t^2} \ .$$
   Il y a trois cas à considérer :

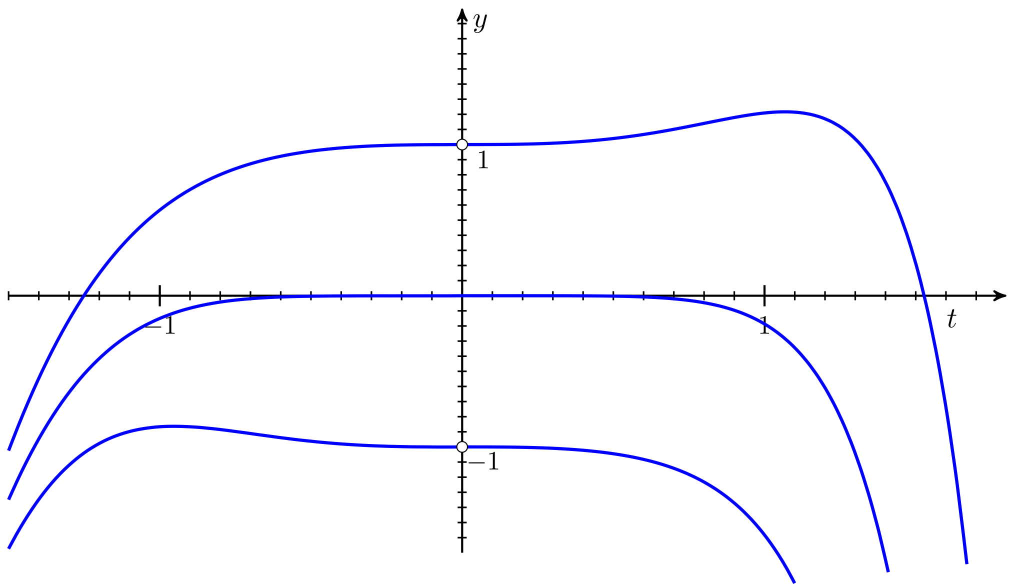
(a) Si $y_0 < 0$, la solution maximale est globale.
(b) Si $y_0 = 0$, la solution se réduit à $y(t) = 0 \ \forall t$, qui est aussi globale.
(c) Si $y_0 > 0$, la solution maximale existe sur l'intervalle $]-1/\sqrt{y_0}, 1/\sqrt{y_0}[$.

- Esquisse des solutions pour $y_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $y_0 = -1$:



2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, y) = t^2 y - t^4$.

- f est continue, et sa dérivée par rapport à y vaut t^2, qui est continue. Ceci implique en particulier qu'elle est localement Lipschitzienne par rapport à y. Elle satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz. (En fait, f est même de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui est une condition suffisante pour qu'elle satisfasse les hypothèses du théorème.)
- On utilise la méthode de la variation de la constante. L'équation homogène $y' = t^2 y$ avec $y(0) = y_0$ admet la solution $y_0 \,\mathrm{e}^{t^3/3}$. On pose alors $y(t) = z(t)\,\mathrm{e}^{t^3/3}$, et on obtient
$$z'(t) = -t^5 \,\mathrm{e}^{t^3/3} \ .$$
En intégrant par parties, on trouve
$$\begin{aligned} z(t) &= y_0 + \int_0^t s^3(-s^2)\,\mathrm{e}^{-s^3/3}\,\mathrm{d}s \\ &= y_0 + t^3\,\mathrm{e}^{-t^3/3} + 3\int_0^t (-s^2)\,\mathrm{e}^{-s^3/3}\,\mathrm{d}s \\ &= y_0 + t^3\,\mathrm{e}^{-t^3/3} + 3(\mathrm{e}^{-t^3/3} - 1) \ . \end{aligned}$$
En remplaçant dans l'expression de $y(t)$, on obtient
$$y(t) = (y_0 - 3)\,\mathrm{e}^{t^3/3} + t^3 + 3 \ .$$
Cette solution existe pour tout t, donc toute solution maximale est globale.
- Esquisse des solutions pour $y_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $y_0 = -1$:



Exercice 2 (8 points)**.**

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc elle satisfait bien les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipshitz.
2. Si $y(t) = 0$ pour tout t, alors $y'(t) = 0$ et $f(t, y(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc la fonction identiquement nulle est bien une solution.
3. Soit $y_+ : I \to]0, +\infty[$ une solution de l'équation, de condition initiale $y_+(0) = y_0 > 0$, et soit $y_- : I \to]-\infty, 0[$ définie par $y_-(t) = -y_+(t)$. Alors

$$y'_-(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-y_+(t)) = -y'_+(t) = -f(t, y_+(t)) = f(t, -y_+(t)) = f(t, y_-(t))$$

   en vertu de la symétrie $f(t, -y) = -f(t, y)$. La fonction y_- est donc bien une solution, de condition initiale $y_-(0) = -y_+(0) = -y_0$.
4. Lorsque $b(t) = 0\ \forall t$, l'équation est linéaire, et sa solution y_1 de condition initiale $y_1(0) = 1$ peut s'écrire

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha(t)} , \qquad \alpha(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s .$$

5. Dans le cas général, on pose $y(t) = z(t)y_1(t)$. En substituant dans l'EDO pour y, on trouve

$$z'(t)y_1(t) + z(t)y'_1(t) = a(t)z(t)y_1(t) + b(t)z(t)^3y_1(t)^3 ,$$

   d'où, en utilisant le fait que $y'_1(t) = a(t)y_1(t)$ et en isolant $z'(t)$,

$$z'(t) = b(t)y_1(t)^2z(t)^3 = b(t)\,\mathrm{e}^{2\alpha(t)}\,z(t)^3 .$$

   Par ailleurs, la condition initiale est $z(0) = y(0) = y_0$.

6. En séparant les variables, on trouve

$$\int_{y_0}^{z(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z^3} = \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{2\alpha(s)}\,\mathrm{d}s =: I(t)\ .$$

   En intégrant, on obtient

$$z(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1-2y_0^2 I(t)}}\ , \qquad y(t) = \frac{y_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t)}}{\sqrt{1-2y_0^2 I(t)}}\ .$$

   Si $2y_0^2 I(t) < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors la solution maximale est globale. Sinon, elle existe sur l'intervalle $]t_-, t_+[$, où

$$\begin{aligned} t_+ &= \inf\{t > 0 \colon 2y_0^2 I(t) = 1\}\ , \\ t_- &= \sup\{t < 0 \colon 2y_0^2 I(t) = 1\}\ . \end{aligned}$$

7. Dans le cas particulier $a(t) = b(t) = \cos(t)$, on obtient

$$\alpha(t) = \sin(t)\ , \qquad I(t) = \int_0^t \cos(s)\,\mathrm{e}^{2\sin(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{2\sin(t)} - 1\big)\ .$$

   Par conséquent,

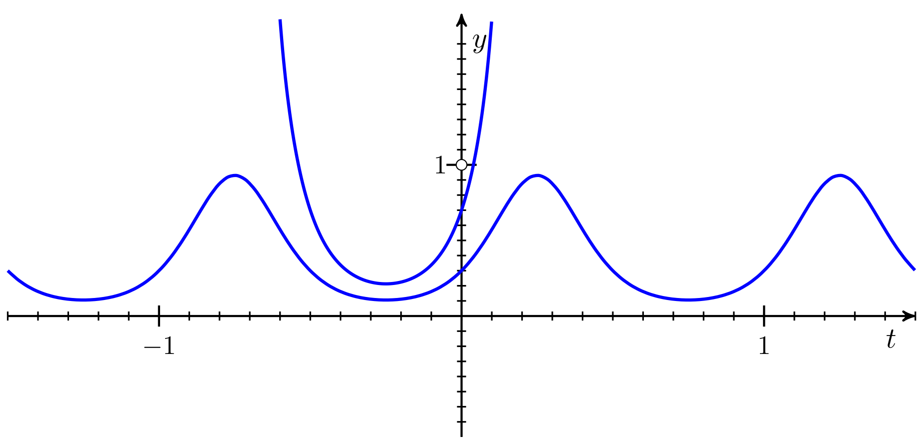
$$y(t) = \frac{y_0\,\mathrm{e}^{\sin(t)}}{\sqrt{1-y_0^2(\mathrm{e}^{2\sin(t)} - 1)}}\ .$$

   Comme $\mathrm{e}^{2\sin(t)} \in [\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^2]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, la solution est globale si

$$y_0^2 < \frac{1}{\mathrm{e}^2 - 1}\ .$$

   Sinon, elle n'existe que pour $t \in]t_-, t_+[$ définis comme ci-dessus.

8. Esquisse d'une solution globale et d'une solution non globale.



Exercice 3 (5 points)**.**

1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, -\gamma y - x^3)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car sa matrice jacobienne
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$
est une fonction continue de (x, y). L'EDO satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz.

2. On obtient
$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= x(t)^3 y(t) + y(t)\big[-\gamma y(t) - x(t)^3\big] \\ &= -\gamma y(t)^2 \;. \end{aligned}$$

3. Dans le cas $\gamma = 0$, on a $v'(t) = 0$, donc $v(t)$ est constante. Supposons par l'absurde qu'une solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de condition initiale $(x(0), y(0))$ n'est pas globale dans le futur. Par le lemme des bouts, cela implique que la solution quitte définitivement tout compact K, donc qu'il existe $t_K > 0$ telle que $(x(t), y(t)) \notin K$ pour tout $t > t_K$. Prenons alors le compact
$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon V(x, y) \leqslant V(x(0), y(0))\big\} \;.$$
Comme $(x(t), y(t)) \notin K$ pour tout $t > t_K$, on a $v(t) > v(0)$ pour ces temps. Mais ceci contredit le fait que $v(t) = v(0)$ pour tout $t \geqslant 0$.
Un raisonnement analogue peut être fait dans le passé.

4. Dans le cas $\gamma > 0$, on a $v'(t) \leqslant 0$ pour tout t, donc v est décroissante, c'est-à-dire en particulier $v(t) \leqslant v(0)$ pour tout $t \geqslant 0$. La solution est donc globale dans le futur, par un raisonnement analogue à celui du point précédent.
Comme en plus, $v(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que la solution existe, la fonction v est décroissante et minorée par 0. Elle admet donc nécessairement une limite $\ell \geqslant 0$.

5. La fonction $t \mapsto v(t)$ est strictement décroissante, sauf aux temps t_0 auxquels $y(t_0) = 0$. Soit alors $t_0 \geqslant 0$ un tel temps, avec $x(t_0) \neq 0$, et calculons $v(t_0 + \varepsilon)$ à l'aide d'un développement limité. On a
$$\begin{aligned} v''(t) &= -2\gamma y(t)y'(t) = 2\gamma^2 y(t)^2 + 2\gamma y(t)x(t)^3 \;, \\ v'''(t) &= 4\gamma^2 y(t)y'(t) + 2\gamma\big[y'(t)x(t)^3 + 3y(t)x(t)^2 y'(t)\big] \;. \end{aligned}$$
En particulier, au temps t_0 on obtient
$$v'(t_0) = 0 \;, \qquad v''(t_0) = 0 \;, \qquad v'''(t_0) = -2\gamma x(t_0)^6 \;.$$
Il suit que
$$v(t_0 + \varepsilon) = v(t_0) - \frac{1}{3}\gamma x(t_0)^6 \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \;.$$
En conséquence, $v(t_0 + \varepsilon) < v(t_0)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, donc $v(t)$ décroît aussi peu après les instants où y s'annule, tant que x ne s'annule pas en même temps. Il suit que $v(t)$ tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. On a donc également $\lim_{t\to\infty} \|(x(t), y(t))\| = 0$, puisque $v(t) = 0$ si et seulement si $\|(x(t), y(t))\| = 0$.