Licence 3 de Mathématiques
Équations différentielles ordinaires

Contrôle continu du 28 février 2024

Durée: 2 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs, tablettes et autres appareils électroniques doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Questions de cours 1 (3 points)**.**
On considère l'EDO
$$y'(t) = f(t, y(t))$$
avec $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. Préciser ce que signifie «f satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz ».
2. Donner la définition d'une solution maximale de l'EDO.
3. Énoncer le lemme des bouts.

Exercice 1 (4 points)**.**
Pour chacune des EDOs sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ci-dessous, on demande de

- Montrer que f satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz.
- Trouver, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale $y(0) = y_0$.
- Esquisser le graphe des solutions pour $y_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $y_0 = -1$.

1. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, y) = 2ty^2$.
2. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, y) = t^2 y - t^5$.

Exercice 2 (8 points)**.**
On se donne deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère l'EDO sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^3 \ .$$

1. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, y) = a(t)y + b(t)y^3$ satisfait-elle les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz ?
2. Montrer que la fonction identiquement nulle est une solution de l'EDO.

3. Montrer que si $y_+ : I \to]0, +\infty[$ est une solution de l'équation, de condition initiale $y_+(0) = y_0 > 0$, alors $y_- : I \to]-\infty, 0[$ définie par $y_-(t) = -y_+(t)$ est solution de condition initiale $y_-(0) = -y_0$.
4. Soit y_1 la solution maximale de l'équation dans le cas où $b(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, de condition initiale $y_1(0) = 1$. Donner une expression explicite de cette solution (cette expression peut contenir des intégrales).
5. Dans le cas général, on pose $y(t) = z(t)y_1(t)$. Montrer que z satisfait une EDO de la forme
$$z'(t) = c(t)z(t)^3$$
pour une fonction $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on précisera (son expression peut contenir des intégrales).
6. Trouver la solution maximale de cette EDO pour la condition initiale $z(0) = z_0 = y_0 \in]0, +\infty[$ (cette expression peut contenir des intégrales).
7. On considère le cas particulier
$$y'(t) = \cos(t)y(t) + \cos(t)y(t)^3 \ .$$
Trouver la solution maximale de cette équation pour toute condition initiale $y(0) = y_0 \in]0, \infty[$. Pour quelles valeurs de y_0 la solution est-elle globale sur $\mathbb{R}$?
8. Esquisser une le graphe d'une solution globale et celui d'une solution non globale.

Exercice 3 (5 points)**.**

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On considère l'EDO autonome sur $U = \mathbb{R}^2$ définie par
$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -\gamma y(t) - x(t)^3 \ . \end{aligned}$$

1. Montrer que l'EDO satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz.
2. On définit une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par
$$V(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 \ .$$
Soit $v(t) = V(x(t), y(t))$, où $(x, y) : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'EDO. Calculer $v'(t)$.
3. En s'appuyant sur le lemme des bouts, en déduire que dans le cas $\gamma = 0$, les solutions de l'EDO sont globales. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.
4. Montrer que dans le cas $\gamma > 0$, pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la solution maximale existe au moins sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Montrer qu'elle satisfait $\lim_{t\to\infty} V(x(t), y(t)) = \ell$ pour un $\ell \in \mathbb{R}$.
5. **Question bonus :** Effectuer un développement limité de v à l'ordre 3 autour des temps t_0 tels que $y(t_0) = 0$. En déduire d'abord que $\ell = 0$, puis que $\lim_{t\to\infty} \|(x(t), y(t))\| = 0$.