

Détermination spectrale

17 juin 2021

- ▶ Soit P un polygone du plan, $\text{spec } P$ est le spectre de l'opérateur de Laplace euclidien avec condition au bord de Dirichlet.
- ▶ Ou bien (X, g) est une variété riemannienne compacte et $\text{spec}(X)$ le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami.
- ▶ On a vu que la donnée de $\text{spec}(P) = (\lambda_k)_{k \geq 0}$ ne permet pas de déterminer P en toute généralité : il existe des polygones (des variétés riemanniennes) isospectraux non isométriques.
- ▶ Une quantité I est un invariant spectral (de P) si la connaissance de $\text{spec}(P)$ permet de déterminer (calculer I). Autrement dit, *on peut entendre I* .

Rappel : une matrice symétrique réelle A est diagonalisable dans une base orthonormée de $E = \mathbb{R}^n$. si on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ alors

$$F \subset E \text{ sev, } \Lambda(F) = \max \left\{ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}, x \in F, x \neq 0 \right\}$$

$$\forall k, \lambda_k = \min \{ \Lambda(F), F \subset E, \dim F = k \}.$$

- ▶ $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace de Hilbert (produit scalaire de référence)
- ▶ $\langle Ax, x \rangle = q(x)$ forme quadratique.
- ▶ Ingrédients de la preuve : λ_1 obtenue par un problème de minimisation puis récurrence en passant à l'orthogonal.

Valeurs propres de Dirichlet

$$\|u\|_{H^1}^2 = q(u) + \|u\|_{L^2}^2$$

Soit P un polygone et son spectre :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

$$\begin{array}{l} \subset H^1 \\ F \subset \underline{C_0^\infty(P)} \text{ sev, } \Lambda(F) = \sup \left\{ \frac{q(u)}{\|u\|_{L^2}^2}, u \in F, u \neq 0 \right\} \\ \subset H_0^1 \end{array}$$

$$\forall k, \lambda_k = \inf \{ \Lambda(F), F \subset L^2(P), \dim F = k \},$$

$$\underline{q(u) = \int_P |\nabla u|^2 dS}, \quad \underline{\|u\|^2 = \int_P |u|^2 dS}$$

$$H^1(P) = \left\{ u \text{ tq } q(u) < +\infty \right\}$$

$$H_0^1 = \overline{C_0^\infty}^{\|\cdot\|_{H^1}} \subset H^1$$

Dirichlet/Neumann bracketing

- ▶ Si on libère des contraintes les valeurs propres baissent.

 H^1

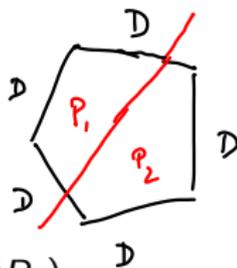
$$P \subset Q \implies \forall k \geq 1, \lambda_k(Q) \leq \lambda_k(P)$$

 H^1_0

$$\forall k \geq 1, \lambda_k^N(P) \leq \lambda_k^D(P)$$



$$H^1_0(Q) \subset H^1_0(P)$$



- ▶ Si on coupe un polygone P en 2

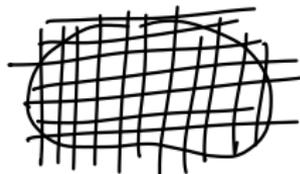
$$\forall k \geq 1, \lambda_k^N(\underline{P_1 \# P_2}) \leq \lambda_k(P) \leq \lambda_k^D(P_1 \# P_2).$$

$$H^1(P_1) \oplus H^1(P_2)$$

- ▶ Une cloche fêlée sonne plus grave.

Formule de Weyl

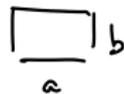
On peut entendre l'aire de P .



$$N(T) = \text{card}\{k, \lambda_k \leq T\}$$

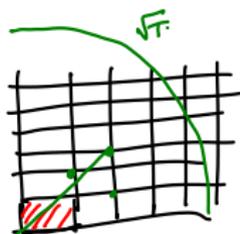
$$N(T) \sim \frac{\text{Aire}(P)}{4\pi} \cdot T$$

- Pour un rectangle, comptage de points entiers.
- $\forall P, \lambda_k \sim \frac{4\pi}{\text{Aire}(P)} k$.
- Spectre d'un carré + monotonie $\implies \lambda_k \asymp k$.



$$\sin\left(\frac{k\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}\right)$$

$$\frac{h^2 \pi^2}{a^2} + \frac{l^2 \pi^2}{b^2} \leq T$$



Calcul fonctionnel et formule de trace

Soit $(\phi_k)_{k \geq 1}$ une base orthonormée de fonctions propres (réelles).
Le calcul fonctionnel associe, à une fonction f (définie sur \mathbb{R}^+) un opérateur $f(\Delta)$ sur L^2 défini par

$$\forall u \in L^2, \quad f(\Delta)u = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) \langle \phi_k, u \rangle \phi_k.$$

En posant

$$K_f(x, y) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) \overline{\phi_k(y)} \phi_k(x),$$

$$[f(\Delta)u](x) = \int \langle \phi_k(y), u \rangle \phi_k(x) dy$$

et sous réserves que les interversions soient justifiées, on trouve

$$\int_P K_f(x, x) dx = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) \quad (= \text{Tr } f(\Delta)).$$

Toute information géométrique extraite de l'intégrale sera un invariant spectral.

- 1 Choisir f . Exemples classique : $f(\lambda) = e^{-t\lambda}$ (chaleur), $\cos t\sqrt{\lambda}$ (ondes), $e^{\frac{iT}{h}\Delta}$ (Schrödinger).
- 2 Construire le noyau K_f géométriquement.
- 3 Prendre la trace, et en extraire des quantités géométriques.
- 4 Cela nécessite souvent de regarder un certain régime asymptotique : $t \rightarrow 0$ pour la chaleur, limite haute fréquence pour les ondes, $h \rightarrow 0$ pour Schrödinger (limite semiclassique).

Développement de la chaleur

Soit P un polygone et p le noyau de la chaleur :

$$e^{-t\Delta} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{array} \right.$$

$$\forall u \in L^2, \forall (t, x) \in]0, +\infty[, \int_P p(t, x, y) u(y) dy,$$

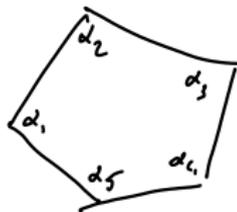
est la solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale u_0 .
Quand t tend vers 0^+ :

$$\sum_{k \geq 1} e^{-t\lambda_k} = \int_P p(t, x, x) dx = \frac{a_{-1}}{t} + \frac{a_{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}} + a_0 + o(1)$$

$$a_{-1} = \frac{\text{Aire}(P)}{4\pi},$$

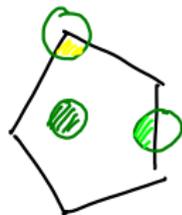
$$a_{-\frac{1}{2}} = -\frac{\text{long}(\partial P)}{8\sqrt{\pi}}$$

$$a_0 = \frac{1}{24} \sum_{\alpha} \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\alpha}{\pi}.$$



- 1 On utilise une partition de l'unité pour recouvrir P par des ouverts sur lesquels la géométrie est soit celle du plan, soit celle du demi-plan, soit celle d'un secteur angulaire.
- 2 Dans tous ces cas, le noyau de la chaleur est connu explicitement. Dans le plan :

$$p_{\mathbb{R}^2}(t, x, y) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}}.$$



Formule de Carslaw-Sommerfeld pour les secteurs.

- 3 *Kac's principle of not feeling the boundary* : dans chaque ouvert U , si on remplace le noyau de la chaleur par celui de son modèle, on fait une erreur $O(t^\infty)$.

Grieser et Maronna montrent le lemme suivant

Lemme

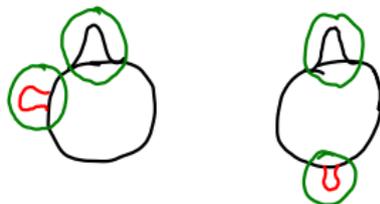
Un triplet (α, β, γ) de réels positifs tel que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ est uniquement déterminé (à l'ordre près) par les deux quantités :

1 $\cotan \frac{\alpha}{2} + \cotan \frac{\beta}{2} + \cotan \frac{\gamma}{2} \quad (= \frac{P^2}{4A})$

2 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

On en déduit qu'un triangle est spectralement déterminé (parmi les triangles). En effet, avec le développement de la chaleur, on peut entendre l'aire A , le périmètre P et la somme $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

- ▶ Développement asymptotique du noyau de la chaleur (Minakshisundaram-Pleijel) pour une variété riemannienne quelconque \implies invariant spectraux *locaux* (dépendent des dérivées de la métrique).
- ▶ Pour un ouvert à bord lisse, on peut entendre l'aire et le périmètre (...). Le disque est donc spectralement déterminé.
- ▶ Assez facile de construire des domaines non isométriques qui ont les même invariants *de la chaleur* (à cause du principe de localisation).



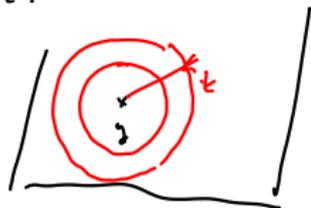
Propagation des ondes

$$\begin{cases} \partial_t^2 \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

- ▶ Quelles informations géométriques peut-on retirer du propagateur de l'équation des ondes, et comment ?

- ▶ Le noyau de $\frac{\sin t\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}$ dans le plan s'écrit

$$w(t, x, y) = C(t^2 - d^2(x, y))_+^{-\frac{1}{2}}$$



C'est le profil (en x) de l'onde au temps t obtenue en tapant le plan au point y à $t = 0$.

- ▶ On observe la propagation à vitesse finie, et $x \mapsto w(t, x, y)$ est lisse, sauf sur la sphere de centre y et de rayon t .

- ▶ En utilisant la transformation de Fourier, on peut écrire w comme une intégrale oscillante :

$$w(t, x, y) = \int \exp(i\omega(t^2 - d^2(x, y))) a(x, y, \omega) d\omega,$$

avec a un symbole (ici une puissance de ω).

- ▶ Prototype :

$$T(x, y) = \int \exp(i\omega(y - \phi(x))) a(x, y) \chi(\omega) \omega^\alpha d\omega$$

- ▶ Pour associer un front d'onde à une telle distribution, on forme

$$I(s) = \int \exp(i\omega(y - \phi(x))) a(x, y) \chi(\omega) \omega^\alpha \rho(x, y) e^{-is\psi(x, y)} d\omega dx dy.$$

et on étudie le comportement quand s tend vers l'infini.

Phase stationnaire

$$I(s) = \int \exp(i\omega(y - \phi(x))) a(x, y) \chi(\omega) \underbrace{\omega^\alpha \rho(x, y)}_{s^{\alpha'}} e^{-is\psi(x, y)} d\omega dx dy.$$

$$= s^{\alpha+1} \int \exp(is\underbrace{\Phi(x, y, \theta)}_{s^{\alpha'}}) \tilde{a}(x, y, \theta) \chi(s\theta) d\theta dx dy$$

$$\underline{\Phi}(x, y, \theta) = \theta(y - \varphi(x)) - \psi(x, y)$$

$$\partial_x \Phi = 0$$

$$\partial_y \Phi = 0$$

$$\partial_\theta \Phi = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y - \varphi(x) = 0 \\ -\theta \varphi'(x) - \psi'(x) = 0 \\ \theta - \varphi'(y) = 0 \end{array} \right]$$

$$x \rightarrow \varphi(x) = y$$

Définition de l'analyse microlocale puis des OIF par Hörmander.

- ▶ En appliquant ce raisonnement au propagateur de l'équation des ondes, on voit qu'il propage les singularités en ligne droite.
- ▶ Duistermaat-Hörmander montrent que, sur une variété riemannienne quelconque, pour des temps petits, le propagateur de l'équation des ondes admet une expression comme ci-dessus : les singularités se propagent par le flot géodésique.
- ▶ Généralisations pour traiter les cas à bords, les singularités coniques.

Théorème

On définit $\sigma(t) = \sum_{k \geq 1} \cos(t\sqrt{\lambda_k})$ alors si $L > 0$ est une singularité de σ , il existe au moins une orbite périodique de longueur L .

- ▶ Poisson, Selberg : formules exactes.
- ▶ Chazarain-Piriou, Melrose (avec bord, orbites réfléchies), Durso, H.-Wunsch, Melrose-Wunsch (singularités coniques, orbites diffractives)
- ▶ Calcul de la singularité : Colin de Verdière, Duistermaat-Guillemin, Durso, H., Ford-Wunsch.
- ▶ Preuve : calcul des intégrales oscillantes, analyse microlocale.

- ▶ Première démonstration de Durso pour les triangles (on peut entendre la plus petite hauteur)
- ▶ Hezari-Lu-Rowlett pour les trapèzes
- ▶ Une difficulté : deux singularités peuvent se détruire. Techniquement, on utilise que la plus petite orbite.
- ▶ Zelditch, Hezari-Zelditch : domaine analytique du plan avec une symétrie.

- ▶ Version semiclassique de l'histoire (Schrödinger).
- ▶ Fonction zeta spectrale (déterminant).
- ▶ Et si on ne connaît qu'un nombre fini de valeurs propres ?
- ▶ Géométries plus singulières (sous-riemannienne).