Préparation à l'agrégation. Modélisation I

2019-2020

Enseignant

Nils Berglund, `nils.berglund@univ-orleans.fr`

Dates

Les vendredis 13/09, 29/11, 6/12, 13/12 : 10h15-12h15 et 13h 30- 15h30, salle E 2000
Les vendredis 27/09, 18/10 , 8/11, 15/11 : 9h00-10h00 et 13h30-16h15, salle E 2000

Page web du cours

`http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/agreg_ext.html`

Programme de l'agrégation

A. À l'écrit:

1. Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel–Cantelli.
2. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de Bayes.
3. Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire : loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.
4. Exemples de variables aléatoires : variable de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.
5. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
6. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
7. Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, transformée de Laplace, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
8. Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi.

9. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé–Tchebychev. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
10. Théorème de Lévy, théorème central limite, applications en statistiques.

B. À l'oral:

1. Utilisation de lois usuelles pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages . . . Méthodes de simulation de variables aléatoires.
2. Chaînes de Markov à espace d'états finis. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème central limite admis). Chaînes de Markov homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.
3. Lois de Poisson, exponentielle et Gamma, construction et propriétés du processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$.
4. Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence presque sûre et L^2 des martingales à temps discret.
5. Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques.
6. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.
7. Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.
8. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbb{R}^n$.
9. Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire simple ou multiple, exemples d'utilisation.
10. Tests paramétriques (test du rapport de vraisemblance). Tests d'ajustement (tests du χ^2, tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.

Bibliographie

[1] B. Bercu et D. Chafaï : Modélisation stochastique et simulation. Cours et applications. Dunod, 2007.

[2] M. Benaïm et N. El Karoui : Promenade aléatoire : Chaînes de Markov et simulations ; martingales et stratégies. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2006.

[3] Ph. Barbe et M. Ledoux : Probabilités. De la licence Ãă l'agrégation. Belin, 1998.

[4] P. Baldi, L. Mazliak et P. Priouret : Martingales et chaînes de Markov. Théorie élémentaire et exercices corrigés. Hermann, 2008.

[5] F. Couty , J. Debord et D. Fredon : Probabilités et statistiques. Dunod, 1999.

[6] M. Cotrell , V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel et Th. Meyre : Exercices de probabilités. Cassini, 1999.

[7] J.-J. Daudin, S. Robin et C. Vuillet : Statistique inférentielle. Presses Universitaires de Rennes, 2001.

[8] A. Dembo et O. Zeitouni : Large deviations techniques and applications, volume 38 de Applications of Mathematics (New York). Springer-Verlag, second édition, 1998.

[9] R. Durrett : Essentials of stochastic processes. Second edition. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2012.

[10] R. Durrett : Probability: theory and examples. Fourth edition. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[11] D. Foata et A. Fuchs : Calcul des probabilités. Dunod, 1998.

[12] D. Foata et A. Fuchs : Processus stochastiques. Dunod, 2002.

[13] M. Fisz : Probability theory and mathematical statistics. Wiley, 1963.

[14] A. Monfort : Cours de statistique mathématique. Économia, 1982.

[15] J. R. Norris : Markov Chains. Cambridge University Press, 1998.

[16] D. Revuz : Probabilités. Hermann, 1997.

[17] V. Rivoirard et G. Stolz : Statistique mathématique en action. Vuibert, 2012.

[18] G. Saporta : Probabilités, analyse de données et statistique. Éditions Technip, 1990.

[19] Ph. Tassi : Méthodes statistiques. Économia, 1985.

[20] D. Williams : Probability with martingales. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[21] B. Ycart : Modèles et Algorithmes Markoviens, volume 39 de Mathématiques et Applications. Springer, 2002.