

Préparation à l'agrégation. Modélisation I

2015-2016

Enseignant

Nils Berglund, nils.berglund@univ-orleans.fr

Second semestre: Florent Malrieu, florent.malrieu@lmpt.univ-tours.fr

Dates

Les vendredis 11/9, 18/9, 25/9, 2/10, 9/10, 16/10, 23/10
8h00 – 12h15 salle L4

Page web du cours

<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/agreg.html>

Programme de l'agrégation

A. À l'écrit:

1. Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel–Cantelli.
2. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de Bayes.
3. Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire : loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.
4. Exemples de variables aléatoires : variable de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.
5. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
6. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
7. Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, transformée de Laplace, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
8. Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p , presque sûrement, en loi.

9. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé–Tchebychev. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
10. Théorème de Lévy, théorème central limite, applications en statistiques.

B. À l'oral:

1. Utilisation de lois usuelles pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages . . . Méthodes de simulation de variables aléatoires.
2. Chaînes de Markov à espace d'états finis. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème central limite admis). Chaînes de Markov homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.
3. Lois de Poisson, exponentielle et Gamma, construction et propriétés du processus de Poisson sur \mathbb{R}_+ .
4. Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence presque sûre et L^2 des martingales à temps discret.
5. Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques.
6. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.
7. Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.
8. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de Cochran. Théorème central limite dans \mathbb{R}^n .
9. Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire simple ou multiple, exemples d'utilisation.
10. Tests paramétriques (test du rapport de vraisemblance). Tests d'ajustement (tests du χ^2 , tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.

Bibliographie

- [1] B. BERCU ET D. CHAFAÏ : Modélisation stochastique et simulation. Cours et applications. Dunod, 2007.
- [2] M. BENAÏM ET N. EL KAROUI : Promenade aléatoire : Chaînes de Markov et simulations ; martingales et stratégies. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2006.
- [3] PH. BARBE ET M. LEDOUX : Probabilités. De la licence l'agrégation. Belin, 1998.

- [4] P. BALDI, L. MAZLIAK ET P. PRIOURET : Martingales et chaînes de Markov. Théorie élémentaire et exercices corrigés. Hermann, 2008.
- [5] F. COUTY , J. DEBORD ET D. FREDON : Probabilités et statistiques. Dunod, 1999.
- [6] M. COTRELL , V. GENON-CATALOT, CH. DUHAMEL ET TH. MEYRE : Exercices de probabilités. Cassini, 1999.
- [7] J.-J. DAUDIN, S. ROBIN ET C. VUILLET : Statistique inférentielle. Presses Universitaires de Rennes, 2001.
- [8] A. DEMBO ET O. ZEITOUNI : Large deviations techniques and applications, volume 38 de Applications of Mathematics (New York). Springer-Verlag, second édition, 1998.
- [9] R. DURRETT : Essentials of stochastic processes. Second edition. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2012.
- [10] R. DURRETT : Probability: theory and examples. Fourth edition. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [11] D. FOATA ET A. FUCHS : Calcul des probabilités. Dunod, 1998.
- [12] D. FOATA ET A. FUCHS : Processus stochastiques. Dunod, 2002.
- [13] M. FISZ : Probability theory and mathematical statistics. Wiley, 1963.
- [14] A. MONFORT : Cours de statistique mathématique. Économia, 1982.
- [15] J. R. NORRIS : Markov Chains. Cambridge University Press, 1998.
- [16] D. REVUZ : Probabilités. Hermann, 1997.
- [17] V. RIVOIRARD ET G. STOLZ : Statistique mathématique en action. Vuibert, 2012.
- [18] G. SAPORTA : Probabilités, analyse de données et statistique. Éditions Technip, 1990.
- [19] PH. TASSI : Méthodes statistiques. Économia, 1985.
- [20] D. WILLIAMS : Probability with martingales. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [21] B. YCART : Modèles et Algorithmes Markoviens, volume 39 de Mathématiques et Applications. Springer, 2002.