Probabilités

Corrigé de l'examen du 17 décembre 2013

Problème 1

1. (a) La chaîne est irréductible pour $0 < p \leqslant 1$, car si $p > 0$, le chemin $i \to 0 \to 1 \to \dots \to j$ a une probabilité positive pour tout i, j.

   (b) On a
$$\mathbb{P}_0\{\tau_0 = n\} = \left(1 - \frac{p}{n}\right)\frac{p^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{p^n}{n!}$$
pour tout $n \geqslant 1$. Par conséquent
$$\mathbb{P}_0\{\tau_0 \leqslant N\} = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_0\{\tau_0 = n\} = 1 - \frac{p^N}{N!}$$
ce qui implique $\mathbb{P}_0\{\tau_0 < \infty\} = 1$. L'état 0 est donc récurrent.

   (c) On a
$$\mathbb{E}_0(\tau_0) = \sum_{n\geqslant 1} n\left(1 - \frac{p}{n}\right)\frac{p^{n-1}}{(n-1)!} .$$
La série est convergente (on peut appliquer le critère de d'Alembert). Il est possible de calculer la somme, mais ce n'est pas nécessaire. L'état 0 est donc récurrent positif.

   (d) La chaîne étant irréductible récurrente positive, elle admet une unique distribution de probabilité stationnaire π. Celle-ci satisfait en particulier pour tout $j \geqslant 1$
$$\pi_j = \sum_{i\in\mathbb{N}} \pi_i p_{ij} = \frac{p}{j} p_{j-1} ,$$
d'où par récurrence sur n
$$\pi_n = \frac{p^n}{n!}\pi_0 \qquad \forall n \geqslant 1 .$$
La condition de normalisation $\sum_n \pi_n = 1$ implique $\pi_0 = \mathrm{e}^{-p}$ et donc π suit la loi de Poisson
$$\pi_n = \mathrm{e}^{-p}\,\frac{p^n}{n!} .$$

2. (a) La chaîne est irréductible pour $0 < p < 1$.

   (b) $Y_{2n} = 0$ si et seulement si la chaîne a fait n pas vers la droite et n pas vers la gauche. Par conséquent
$$\mathbb{P}_0\{Y_{2n} = 0\} = p^n(1-p)^n\binom{2n}{n} = p^n(1-p)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2} .$$

   (c) En appliquant la formule de Stirling, on obtient
$$\mathbb{P}_0\{Y_{2n} = 0\} \sim \big[4p(1-p)\big]^n \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$
pour $n \to \infty$.

   (d) Si $p = 1/2$, alors $\mathbb{P}_0\{Y_{2n} = 0\} \sim 1/\sqrt{\pi n}$, qui n'est pas sommable, donc la chaîne est récurrente. Si $p \neq 1/2$, alors $4p(1-p) < 1$ et la série de terme général $\mathbb{P}_0\{Y_{2n} = 0\}$ est convergente. Donc la chaîne est transiente.

Problème 2

1. X_n est adaptée par définition de la filtration. De plus $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) = 1$ pour tout n puisque $\mathbb{E}(2U_i) = 1$ pour tout i. Enfin,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(2U_{n+1}X_n|\mathcal{F}_n) = 2X_n\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 2X_n\mathbb{E}(U_{n+1}) = X_n \ .$$

   X_n est donc bien une martingale.

2. Comme X_n est une surmartingale positive, elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.

3. (a) $\mathbb{E}(V_1) = 1 + \mathbb{E}(\log(U_1)) = 1 + \int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   (b) $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma V_1}) = \mathrm{e}^\gamma\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma\log(U_1)}) = \mathrm{e}^\gamma\,\mathbb{E}(U_1^\gamma) = \mathrm{e}^\gamma \int_0^1 x^\gamma\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^\gamma}{\gamma+1}$.
   Par l'inégalité de Markov, pour tout $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\{\mathrm{e}^{\gamma V_1} > \mathrm{e}^{\gamma c}\} \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma c}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma V_1}) = \frac{\mathrm{e}^{\gamma(1-c)}}{\gamma+1} \ .$$

   (c) Pour tout $c \in]0,1[$, le choix $\gamma = c/(1-c)$ conduit à

$$\mathbb{P}\{V_1 > c\} = \mathbb{P}\{\mathrm{e}^{\gamma V_1} > \mathrm{e}^{\gamma c}\} \leqslant (1-c)\,\mathrm{e}^c \ .$$

   (d) Soit $Z_n = \sum_{i=1}^n V_i$. Pour tout $c \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}\{Z_n > cn\} = \mathbb{P}\{\mathrm{e}^{\gamma Z_n} > \mathrm{e}^{\gamma cn}\} \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma cn}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma Z_n}) = \left[\mathrm{e}^{-\gamma c}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma V_1})\right]^n$$

   qui est majoré par $[(1-c)\,\mathrm{e}^c]^n$ par le même choix de γ que ci-dessus.

   (e) On a $|(1-c)\,\mathrm{e}^c| < 1 \ \forall c \in]0,1[$, donc la série de terme général $\mathbb{P}\{Z_n > cn\}$ converge pour ces c. Par le lemme de Borel–Cantelli, on en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} < c$$

   presque sûrement pour ces c. Cela reste vrai a fortiori pour $c \geqslant 1$.

4. (a) On a $Y_{n+1} = Y_n + \log(2) + \log(U_{n+1})$ donc $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_n) + \log(2) - 1$ puisque $\mathbb{E}(\log(U_{n+1})) = -1$ par le point 3(a). Comme $\log(2) < 1$ on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = -\infty \ .$$

   (b) On a $Y_n = Z_n - n(1-\log(2))$. Par conséquent, pour tout $c > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} < c - (1-\log(2))$$

   presque sûrement. Avec $0 < c < 1 - \log(2)$ ceci implique que $Y_n \to -\infty$ presque sûrement, et donc $X_n \to 0$ presque sûrement.