Mathématiques financières

Corrigé de l'examen du 21 décembre 2011

Questions de cours [4 points]

1. Une opportunité d'arbitrage est une stratégie d'investissement de portefeuille Φ permettant, avec une fortune initiale nulle et sans risque, de faire un bénéfice avec une probabilité positive. En d'autres termes, Φ est tel que
   (a) $V_0(\Phi) = 0$,
   (b) $\forall\omega \in \Omega$, $V_n(\Phi)(\omega) \geqslant 0$,
   (c) $\exists\omega \in \Omega$ t.q. $V_n(\Phi)(\omega) > 0$,

   où n est la date d'échéance.
2. Un marché financier comportant une opportunité d'arbitrage n'est pas viable. En effet dans un tel marché, des investisseurs pourraient faire un bénéfice arbitrairement grand sans risque, ce qui rend le marché instable. En pratique cela n'arrive jamais; un modèle comportant une opportunité d'arbitrage n'est pas réaliste.
3. Un modèle binomial dans lequel $s_0(1+r) \leqslant s_{1,1} < s_{1,2}$ n'est pas viable car on peut construire explicitement une opportunité d'arbitrage. Cette stratégie consiste à emprunter la somme ms_0 pour acheter m parts de titre risqué, c'est-à-dire $\Phi_1 = (-ms_0, m)$. La valeur au temps 1 de ce portefeuille sera donnée par

$$
\begin{aligned}
V_1(\Phi)(\omega^1) &= -ms_0(1+r) + ms_{1,1} \geqslant 0 \;, \\
V_1(\Phi)(\omega^2) &= -ms_0(1+r) + ms_{1,2} > 0 \;.
\end{aligned}
$$

   On peut donc vendre les titres risqués pour rembourser le prêt initial et faire un bénéfice dans le cas ω^2.
4. La principale limitation de la formule de Black–Scholes est que l'on ne connaît pas la volatilité σ. Il y a d'autres limitations dues aux hypothèses simplificatrices: le taux de l'actif non risqué est supposé connu et fixe; le rendement de l'actif risqué ne prend que deux valeurs; on néglige le coût des transactions et les erreurs d'arrondi…

Problème 1 [8 points]

1. Il y a plusieurs choix possibles d'univers Ω. Une possibilité est de prendre $\Omega = \{0,1,2\} \times \{0,1,2,3,4\}$, où $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ avec ω_n le nombre de couples de descendants à la génération n. Un autre choix (qui correspond à la structure en arbre) est de poser $\Omega_{n,i} = \{0,1,2\}$ pour le nombre de couples descendant du couple i de la génération n et de prendre $\Omega = \Omega_{0,1} \times \Omega_{1,1} \times \Omega_{1,2}$. Dans ce cas certaines "branches" auront une probabilité nulle.
   La filtration canonique peut être définie par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \;, \\
\mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \Omega, A_0, A_1, A_2, A_0 \cup A_1, A_0 \cup A_2, A_1 \cup A_2\} \;, \\
\mathcal{F}_2 &= \mathcal{P}(\Omega) \;,
\end{aligned}
$$

   où $A_i = \{X_1 = i\}$ est l'événement "le premier couple a i couples de descendants".

2. Loi de X_0: $\mathbb{P}\{X_0 = 1\} = 1$.
   Loi de X_1:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 = 0\} &= p \;, \\ \mathbb{P}\{X_1 = 1\} &= \tfrac{1}{2} \;, \\ \mathbb{P}\{X_1 = 2\} &= q \;. \end{aligned}$$

   Loi de X_2: en utilisant

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{X_2 = 0 | X_1 = 0\} = 1 \;, && \mathbb{P}\{X_2 = 0 | X_1 = 2\} = p^2 \;, \\ & && \mathbb{P}\{X_2 = 1 | X_1 = 2\} = p \;, \\ &\mathbb{P}\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} = p \;, && \mathbb{P}\{X_2 = 2 | X_1 = 2\} = \tfrac{1}{4} + 2pq \;, \\ &\mathbb{P}\{X_2 = 1 | X_1 = 1\} = \tfrac{1}{2} \;, && \mathbb{P}\{X_2 = 3 | X_1 = 2\} = q \;, \\ &\mathbb{P}\{X_2 = 2 | X_1 = 1\} = q \;, && \mathbb{P}\{X_2 = 4 | X_1 = 2\} = q^2 \;, \end{aligned}$$

   on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_2 = 0\} &= p\big(\tfrac{3}{2} + pq\big) \;, \\ \mathbb{P}\{X_2 = 1\} &= \tfrac{1}{4} + pq \;, \\ \mathbb{P}\{X_2 = 2\} &= q\big(\tfrac{3}{4} + 2pq\big) \;, \\ \mathbb{P}\{X_2 = 3\} &= q^2 \;, \\ \mathbb{P}\{X_2 = 4\} &= q^3 \;. \end{aligned}$$

3. $\mathbb{E}(X_1|X_0) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2} + 2q = \frac{3}{2} - 2p$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_2 | X_1 = 0) &= 0 \;, \\ \mathbb{E}(X_2 | X_1 = 1) &= \tfrac{1}{2} + 2q \;, \\ \mathbb{E}(X_2 | X_1 = 2) &= p + 2\big(\tfrac{1}{4} + 2pq\big) + 3q + 4q^2 = 1 + 4q \;. \end{aligned}$$

4. Pour que la suite (X_0, X_1, X_2) soit une martingale il faut que $\mathbb{E}(X_1|X_0) = X_0 = 1$ et $\mathbb{E}(X_2|X_1) = X_1$. C'est le cas si et seulement si $p = \frac{1}{4}$.
   La suite est une surmartingale si $p > \frac{1}{4}$ et une sous-martingale si $p < \frac{1}{4}$.
5. Le cas général est en fait un processus de Galton–Watson. Si $Y_{n,i}$ désigne le nombre de couples descendant du $i$ème couple de la génération n, on aura

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,i}$$

   et donc, en supposant l'indépendance des $Y_{n,i}$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) = \sum_{i=1}^{X_n} \mathbb{E}(Y_{n,i}) = X_n \mathbb{E}(Y_{0,1}) \;.$$

   Or $\mathbb{E}(Y_{0,1}) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2} + 2q$, qui vaut 1 si et seulement si $q = \frac{1}{4}$. On aboutit donc aux mêmes conclusions qu'à la question précédente.

Problème 2 [8 points]

1. Le marché 1 n'est pas viable puisque $s_{2,2} = 6 = s_{1,1}$.
   Le marché 2 est viable (pour chaque valeur de $\overline{S}^2_n$, les deux valeurs possibles de $\overline{S}^2_{n+1}$ sont respectivement strictement plus petite et plus grande que $\overline{S}^2_n$). Dans la suite nous considérons le marché 2.
2. Soit

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \mathbb{P}^*\big(\{\omega^1,\omega^2\}\big) = 1 - \mathbb{P}^*\big(\{\omega^3,\omega^4\}\big)\ , \\
p_2 &= \mathbb{P}^*\big(\{\omega^1\}|\{\omega^1,\omega^2\}\big) = 1 - \mathbb{P}^*\big(\{\omega^2\}|\{\omega^1,\omega^2\}\big)\ , \\
p_3 &= \mathbb{P}^*\big(\{\omega^3\}|\{\omega^3,\omega^4\}\big) = 1 - \mathbb{P}^*\big(\{\omega^4\}|\{\omega^3,\omega^4\}\big)\ .
\end{aligned}
$$

   La condition $\mathbb{E}^*(\overline{S}^2_1|\mathcal{F}_0) = \overline{S}^2_0$ implique $6p_1 + 12(1-p_1) = 10$ donc $p_1 = \frac{1}{3}$.
   La condition $\mathbb{E}^*(\overline{S}^2_2|\mathcal{F}_1) = \overline{S}^2_1$ implique $p_2 = \frac{4}{5}$ et $p_3 = \frac{3}{5}$.
   On en déduit la mesure de risque neutre

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^*\big(\{\omega^1\}\big) &= \tfrac{4}{15}\ , \\
\mathbb{P}^*\big(\{\omega^2\}\big) &= \tfrac{1}{15}\ , \\
\mathbb{P}^*\big(\{\omega^3\}\big) &= \tfrac{6}{15}\ , \\
\mathbb{P}^*\big(\{\omega^4\}\big) &= \tfrac{4}{15}\ .
\end{aligned}
$$

3. La fonction de paiement $g(\overline{S}^2_2) = (9 - \overline{S}^2_2)_+$ de l'option satisfait $g(5) = 4$ et $g(10) = g(15) = 0$. Le prix de l'option est donc donné par

$$
\mathbb{E}^*\big(g(\overline{S}^2_2)\big) = \frac{4}{15}g(5) + 0 = \frac{16}{15}\ .
$$

4. Pour déterminer le portefeuille de couverture Φ, commençons par calculer ses valeurs au cours du temps. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_0(\Phi) &= \mathbb{E}^*\big(g(\overline{S}^2_2)|\mathcal{F}_0\big) = \frac{16}{15}\ , \\
\overline{V}_1(\Phi) &= \mathbb{E}^*\big(g(\overline{S}^2_2)|\mathcal{F}_1\big) = \begin{cases} \frac{16}{5} & \text{si } \overline{S}^2_1 = 6\ , \\ 0 & \text{si } \overline{S}^2_1 = 12\ . \end{cases} \\
\overline{V}_2(\Phi) &= \mathbb{E}^*\big(g(\overline{S}^2_2)|\mathcal{F}_2\big) = g(\overline{S}^2_2)
\end{aligned}
$$

   Les conditions d'autofinancement impliquent

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_0(\Phi) &= \Phi^1_1 + 10\Phi^2_1\ , \\
\overline{V}_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi^1_1 + 6\Phi^2_1\ ,
\end{aligned}
$$

   d'où

$$
\Phi^2_1 = -\frac{8}{15}\ , \qquad \Phi^1_1 = \frac{32}{5}\ .
$$

   On peut vérifier que la condition $\overline{V}_1(\Phi)(\omega^2) = \Phi^1_1 + 12\Phi^2_1$ est également satisfaite. En procédant de même pour les temps 1 et 2, on trouve

$$
\begin{aligned}
\Phi^2_2(\omega^1) &= \Phi^2_2(\omega^2) = -\tfrac{4}{5}\ , & \Phi^2_1(\omega^1) &= \Phi^2_1(\omega^2) = 8\ , \\
\Phi^2_2(\omega^3) &= \Phi^2_2(\omega^4) = 0\ , & \Phi^2_1(\omega^3) &= \Phi^2_1(\omega^4) = 0\ .
\end{aligned}
$$

   Dans le cas ω^1, la stratégie s'explicite comme suit:

(a) Au temps 0, le vendeur de l'option vend à découvert $\frac{8}{15}$ de parts de titre risqué, d'une valeur de $\frac{80}{15}$. En ajoutant la somme de $\frac{16}{15}$ obtenue en vendant l'option, il dispose de la somme de $\frac{96}{15} = \frac{32}{5}$ qu'il place en titres non risqués, par exemple sur un compte d'épargne (comme on travaille en prix réactualisés, le taux effectif de ce compte est nul).

(b) Au temps 1, la dette due aux titres vendus à découvert aura diminué à $6\frac{8}{15} = \frac{16}{5}$, et la valeur du portefeuille augmenté à $\frac{32}{5} - \frac{16}{5} = \frac{16}{5}$. L'investisseur vend alors à découvert $\frac{4}{15}$ de parts supplémentaires de titre risqué, d'une valeur de $\frac{8}{5}$, portant sa dette à $-\frac{4}{5}$ de parts de titres risqués, d'une valeur de $-\frac{24}{5}$. Son avoir en titres non risqués augmente alors à 8.

(c) Au temps 2, la dette due aux $\frac{4}{5}$ de parts de titre risqué aura diminué à 4. La fortune de l'investisseur sera donc de $8 - 4 = 4$, ce qui lui permet de couvrir la fonction de paiement de l'option. L'acheteur de l'option va exercer son droit de vendre une part de titre risqué au prix de 9 au lieu de 5.