Martingales et calcul stochastique

Corrigé de l'examen du 7 janvier 2013

Problème 1 (3 points)

1. On a
$$\mathbb{E}\left(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(f(X_n + U_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(X_n + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\,\mathrm{d}\theta\;.$$
Par conséquent, Y_n est une sous-martingale si f est sous-harmonique, une surmartingale si f est surharmonique, et une martingale si f est harmonique.
2. Si f est la partie réelle d'une fonction analytique, le théorème de Cauchy s'écrit
$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$
où $\mathcal{C}$ est un contour entourant z. En prenant un contour de la forme $w = z + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, avec $0 \leqslant \theta < 2\pi$, on obtient que f est harmonique, donc que Y_n est une martingale.

Problème 2 (4 points)

1. Comme
$$f(Y) = 1_{\{Y<c\}}f(c) + 1_{\{Y\geqslant c\}}\int_c^Y f'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \leqslant f(c) + \int_c^\infty 1_{\{\lambda<Y\}}f'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\;,$$
on obtient, en prenant l'espérance,
$$\mathbb{E}\left(f(Y)\right) \leqslant f(c) + \int_c^\infty \mathbb{P}\left\{Y>\lambda\right\}f'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\;.$$
2. Pour tout $M>1$ nous pouvons écrire
$$\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\wedge M\right) \leqslant 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\left\{\overline{X}_n\wedge M > \lambda\right\}\mathrm{d}\lambda\;.$$
Par l'inégalité de Doob,
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \mathbb{P}\left\{\overline{X}_n\wedge M>\lambda\right\}\mathrm{d}\lambda &\leqslant \int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left(\overline{X}_n 1_{\{\overline{X}_n\wedge M\geqslant\lambda\}}\right)\mathrm{d}\lambda\\ &= \int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\int_\Omega X_n^+ 1_{\{\overline{X}_n\wedge M\geqslant\lambda\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\;\mathrm{d}\lambda\\ &= \int_\Omega X_n^+\int_1^{\overline{X}_n\wedge M}\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda 1_{\{\overline{X}_n\wedge M>1\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &= \int_\Omega X_n^+\log^+(\overline{X}_n\wedge M)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &= \mathbb{E}\left(X_n^+\log^+(\overline{X}_n\wedge M)\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(X_n^+\log^+(X_n^+)\right) + \frac{1}{\mathrm{e}}\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\wedge M\right)\;.\end{aligned}$$
Il suit que
$$\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\wedge M\right) \leqslant 1 + \mathbb{E}\left(X_n^+\log^+(X_n^+)\right)\;.$$
Le résultat s'obtient en faisant tendre M vers l'infini, et en invoquant le théorème de convergence dominée.

3. Pour une variable Y intégrable, on a nécessairement

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}\left(Y 1_{\{Y>M\}}\right) = \lim_{M\to\infty} \Big[\mathbb{E}\left(Y\right) - \mathbb{E}\left(Y 1_{\{Y\leqslant M\}}\right)\Big] = 0$$

en vertu du théorème de convergence monotone. Comme par ailleurs

$$|X_n| 1_{\{|X_n|>M\}} \leqslant Y 1_{\{Y>M\}}$$

pour tout n, le résultat suit en prenant le sup puis l'espérance des deux côtés.
4. Soit $Y = \sup_n |X_n|$. On a $Y \leqslant \overline{X}_n^+ + \overline{X}_n^-$, où $\overline{X}_n^- = \sup_n(-X_n)$. Alors le résultat du point 2. implique $\mathbb{E}\left(Y\right) < \infty$, et le point 3. montre que que la suite des X_n est uniformément intégrable. Le théorème de convergence L^1 permet de conclure.

Problème 3 (4 points)

1. Par variation de la constante,

$$X_t = x\,\mathrm{e}^{-t} + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\,\mathrm{d}B_s\ .$$

2. Donner le générateur infinitésimal L de X_t.

$$L = -x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ .$$

3. En admettant que τ est fini presque sûrement, la formule de Dynkin implique que $h(x) = \mathbb{E}^{\,x}(1_a(X_\tau))$ satisfait le système

$$\begin{aligned} -xh'(x) + \frac{\sigma^2}{2}h''(x) &= 0 \qquad\qquad \text{pour } a < x < b\ , \\ h(a) &= 1\ , \\ h(b) &= 0\ . \end{aligned}$$

Soit $g(x) = h'(x)$. On a

$$g'(x) = \frac{2}{\sigma^2}xg(x)\ ,$$

dont la solution générale est, par séparation des variables,

$$g(x) = c\,\mathrm{e}^{x^2/\sigma^2}\ .$$

Il suit que

$$h(x) = 1 + c\int_a^x \mathrm{e}^{y^2/\sigma^2}\,\mathrm{d}y\ ,$$

et la condition $h(b) = 0$ implique

$$c = -\frac{1}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{y^2/\sigma^2}\,\mathrm{d}y}\ .$$

On peut écrire la solution sous la forme

$$h(x) = \frac{\displaystyle\int_x^b \mathrm{e}^{y^2/\sigma^2}\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{y^2/\sigma^2}\,\mathrm{d}y}\ .$$

4. Lorsque $\sigma \to 0$, chaque intégrale est dominée par la valeur maximale de y dans le domaine d'intégration. Il suit que pour $a < x < b$,

$$h(x) \simeq \frac{\mathrm{e}^{x^2/\sigma^2} + \mathrm{e}^{b^2/\sigma^2}}{\mathrm{e}^{a^2/\sigma^2} + \mathrm{e}^{b^2/\sigma^2}} \ .$$

Par conséquent,
- si $|a| > b$, $h(x) \to 0$;
- si $a = -b$, $h(x) \to 1/2$;
- si $|a| < b$, $h(x) \to 1$.

Problème 4 (9 points)

1. Approche martingale.
   (a) On a $\mathbb{E}\left(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}|\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda \operatorname{Im} X_t}\right) < \infty$ pour $\lambda \geqslant 0$ et $t < \infty$. De plus, si $t > s \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}\,|\mathcal{F}_s\right) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_s}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(X_t - X_s)}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_s}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(B_t^{(1)} - B_s^{(1)})}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(B_t^{(2)} - B_s^{(2)})}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_s}\,\mathrm{e}^{-(t-s)\lambda^2/2}\,\mathrm{e}^{(t-s)\lambda^2/2} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_s} \ .\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}$ est bien une martingale.

   (b) Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}$, le théorème d'arrêt montre que

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_{t\wedge\tau}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_0} = \mathrm{e}^{-\lambda} \ .$$

   Si $\lambda \geqslant 0$, le membre de gauche est borné par 1 puisque $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\,\lambda X_{t\wedge\tau}) \leqslant 0$. On peut donc prendre la limite $t \to \infty$. Si $\lambda < 0$, on peut appliquer un raisonnement similaire à la martingale $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\lambda X_t}$. Par conséquent on obtient

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_{t\wedge\tau}}\right) = \mathrm{e}^{-|\lambda|} \ .$$

   (c) La densité de X_τ s'obtient par transformée de Fourier inverse,

$$f_{X_\tau}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}\,x} + \frac{1}{1-\mathrm{i}\,x}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ .$$

   X_τ suit donc une loi de Cauchy (de paramètre 1).

2. Approche principe de réflexion.
   (a) $B_t^{(1)}$ suit une loi normale centrée de variance t, donc sa densité est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2t} \ .$$

   (b) Le principe de réflexion implique

$$\mathbb{P}\left\{\tau < t\right\} = 2\mathbb{P}\left\{1 + B_t^{(2)} < 0\right\} = 2\mathbb{P}\left\{B_1^{(2)} < -\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = 2\int_{-\infty}^{-1/\sqrt{t}} \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}y$$

   ce qui donne pour la densité de τ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{P}\left\{\tau < t\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\,\mathrm{e}^{-1/2t} \ .$$

(c) La densité de $X_\tau = B^{(1)}_\tau$ vaut donc

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\,\mathrm{e}^{-1/2t}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-(1+x^2)/2t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

où on a utilisé le changement de variable $u = 1/t$.

3. Approche invariance conforme.

(a) On vérifie que $f'(z) \neq 0$, que f admet une réciproque, et que $|f(x)| = 1$ pour x réel.

(b) Le lieu de sortie du disque $\mathbb{D}$ du mouvement Brownien issu de 0 a une distribution uniforme, par symétrie. Par le théorème de transfert, la loi de X_τ est alors donnée par

$$\mathbb{P}\bigl\{X_\tau \in \mathrm{d}x\bigr\} = \frac{1}{2\pi}|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\;.$$