Martingales et calcul stochastique

Corrigé de l'examen du 17 janvier 2012

Problème 1 : La loi de l'arcsinus (10 points)

Soit $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ un mouvement Brownien standard dans $\mathbb{R}$. On considère le processus

$$X_t = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{B_s>0\}}\,\mathrm{d}s\,, \qquad t>0\,.$$

Le but de ce problème est de démontrer la loi de l'arcsinus *:*

$$\mathbb{P}\bigl\{X_t < u\bigr\} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\bigl(\sqrt{u}\bigr)\,, \qquad 0\leqslant u\leqslant 1\,. \tag{1}$$

1. *Que représente la variable X_t ?*

   X_t est la proportion de temps avant t pendant laquelle le mouvement Brownien est positif. Le résultat montre qu'elle est indépendante de t, ce qui est une conséquence de l'invariance d'échelle du mouvement Brownien.

2. *Montrer que X_t est égal en loi à X_1 pour tout $t>0$.*

   La propriété différentielle du mouvement Brownien montre que B_{tu} est égal à $t^{-1/2}B_u$ en loi, donc que $1_{\{B_{tu}>0\}}$ est égal à $1_{\{B_u>0\}}$ en loi. Le changement de variable $s=tu$ montre que

   $$X_t = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{B_{tu}>0\}}t\,\mathrm{d}u = \int_0^1 1_{\{B_{tu}>0\}}\,\mathrm{d}u$$

   qui est égal à X_1 en loi.

3. *On fixe $\lambda>0$. Pour $t>0$ et $x\in\mathbb{R}$, on définit la fonction*

   $$v(t,x) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t 1_{\{x+B_s>0\}}\,\mathrm{d}s}\right)$$

   et sa transformée de Laplace

   $$g_\rho(x) = \int_0^\infty v(t,x)\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}t\,, \qquad \rho>0\,.$$

   Montrer que

   $$g_\rho(0) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\rho+\lambda X_1}\right)\,.$$

   On a $v(t,0) = \mathbb{E}\,(\mathrm{e}^{-\lambda t X_t}) = \mathbb{E}\,(\mathrm{e}^{-\lambda t X_1})$. Par conséquent

   $$g_\rho(0) = \mathbb{E}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\rho+\lambda X_1)t}\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\rho+\lambda X_1}\right)\,.$$

4. *Calculer $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)$ à l'aide de la formule de Feynman–Kac.*

   $$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) - \lambda 1_{\{x>0\}}v(t,x)\,.$$

5. *Calculer $g''_\rho(x)$. En déduire que $g_\rho(x)$ satisfait une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre à coefficients constants par morceaux. Montrer que sa solution générale s'écrit*
$$g_\rho(x) = A_\pm + B_\pm \,\mathrm{e}^{\gamma_\pm x} + C_\pm \,\mathrm{e}^{-\gamma_\pm x}$$
avec des constantes $A_\pm, B_\pm, C_\pm, \gamma_\pm$ dépendant du signe de x.

$$\begin{aligned}
g''_\rho(x) &= \int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}t + 2\lambda 1_{\{x>0\}} \int_0^\infty v(t,x)\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2v(t,x)\,\mathrm{e}^{-\rho t}\Big|_0^\infty + 2\rho\int_0^\infty v(t,x)\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,\mathrm{d}t + 2\lambda 1_{\{x>0\}} g_\rho(x) \\
&= -2 + 2\rho g_\rho(x) + 2\lambda 1_{\{x>0\}} g_\rho(x)\;.
\end{aligned}$$

On a donc l'équation différentielle ordinaire
$$g''_\rho(x) = \begin{cases} 2(\rho+\lambda)g(x) - 2 & \text{si } x > 0\;, \\ 2\rho g(x) - 2 & \text{si } x < 0\;. \end{cases}$$

Considérons séparément les équations sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$. Les équations homogènes admettent les solutions linéairement indépendantes $\mathrm{e}^{\gamma_\pm x}$ et $\mathrm{e}^{-\gamma_\pm x}$, où $\gamma_+ = \sqrt{2(\rho+\gamma)}$ et $\gamma_- = \sqrt{2\rho}$. De plus chaque équation admet une solution particulière constante, égale à $A_+ = 1/(\rho+\lambda)$, respectivement $A_- = 1/\rho$.

6. *Déterminer les constantes en utilisant le fait que g_ρ doit être bornée, continue en 0, et que g'_ρ doit être continue en 0. En conclure que $g_\rho(0) = 1/\sqrt{\rho(\lambda+\rho)}$.*

Pour que g_ρ soit bornée, il faut que $B_+ = C_- = 0$. La continuité de g_ρ et g'_ρ permet de déterminer B_- et C_+. En particulier
$$C_+ = \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}\,(\sqrt{\rho+\lambda}+\sqrt{\rho}\,)(\rho+\lambda)} = \frac{\sqrt{\rho+\lambda}-\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}\,(\rho+\lambda)}\;.$$

Il suit que
$$g_\rho(0) = \frac{1}{\rho+\lambda} + C_+ = \frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda+\rho)}}\;.$$

7. *Démontrer* (1) *en utilisant l'identité*
$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \sum_{n=0}^\infty (-\lambda)^n \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x\;.$$

Nous avons
$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = g_1(0) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+\lambda X_1}\right) = \sum_{n=0}^\infty (-\lambda)^n \mathbb{E}\left(X_1^n\right)\;.$$
L'identité montre que
$$\mathbb{E}\left(X_1^n\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$$
pour tout $n \geqslant 0$, donc que X_1 admet la densité $1/\sqrt{x(1-x)}$. Le résultat suit en intégrant cette densité et en utilisant l'égalité en loi de X_t et X_1.

Problème 2 : La loi du logarithme itéré (10 points)

Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., centrées, de variance 1. On suppose que la fonction génératrice

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X_1}\right)$$

est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \; .$$

Le but de ce problème est de montrer que presque sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log(\log n)}} \leqslant 1 \; . \tag{2}$$

Dans la suite, on pose $h(t) = \sqrt{2t\log(\log t)}$ pour $t > 1$.

1. *Montrer que $\psi(\lambda) = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^2)$.*

   Le théorème de dérivation sous le signe intégral de Lebesgue montre que $\psi(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec
   $$\psi^{(n)}(0) = \mathbb{E}\left(X_1^n\right)$$
   pour tout $n \geqslant 0$. Le résultat suit alors de la formule de Taylor et des hypothèses sur la loi de X_1.

2. *Montrer que $Y_n = \mathrm{e}^{\lambda S_n}/\psi(\lambda)^n$ est une martingale.*

   La relation
   $$Y_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda X_{n+1}}}{\psi(\lambda)} Y_n$$
   montre que $\mathbb{E}\left(|Y_n|\right)$ est bornée par 1 et que $\mathbb{E}\left(Y_{n+1}|Y_n\right) = Y_n$.

3. *Montrer que pour tout $N \geqslant 1$ et tout $a > 0$,*
   $$\mathbb{P}\left\{\exists n \leqslant N \colon S_n > a + n\frac{\log\psi(\lambda)}{\lambda}\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a} \; .$$

   Le probabilité peut se réécrire
   $$\mathbb{P}\left\{\sup_{n\leqslant N}\left(S_n - n\frac{\log\psi(\lambda)}{\lambda}\right) > a\right\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{n\leqslant N} Y_n > \mathrm{e}^{\lambda a}\right\}$$
   et la borne suit de l'inégalité de Doob.

4. *On fixe $t, \alpha > 1$. Pour tout $k \geqslant 1$, on pose*
   $$a_k = \frac{\alpha}{2}h(t^k) \; , \qquad \lambda_k = \frac{h(t^k)}{t^k} \; , \qquad c_k = \frac{\alpha}{2} + t\frac{\log\psi(\lambda_k)}{\lambda_k^2} \; .$$
   Montrer que
   $$\mathbb{P}\left\{\exists n \in]t^k, t^{k+1}] \colon S_n > h(n)c_k\right\} \leqslant (k\log t)^{-\alpha} \; .$$

   On remarque que pour $n \in]t^k, t^{k+1}]$, on a
   $$h(n)c_k \geqslant h(t^k)c_k = \frac{\alpha}{2}h(t^k) + t^{k+1}\frac{\log\psi(\lambda_k)}{\lambda_k} \geqslant a_k + n\frac{\log\psi(\lambda_k)}{\lambda_k} \; .$$
   La probabilité cherchée est donc bornée par $\mathrm{e}^{-\lambda_k a_k} = \mathrm{e}^{-\alpha\log(k\log t)} = (k\log t)^{-\alpha}$ en vertu du résultat précédent.

5. *Montrer que presque sûrement,*

$$\mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{h(n)} \leqslant c_k \ \forall n \in]t^k, t^{k+1}], k \to \infty\right\} = 1 \ .$$

Cela suit du lemme de Borel–Cantelli, et du fait que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log t)^{\alpha}} = \frac{1}{(\log t)^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty \ .$$

6. *En utilisant le point 1., montrer que*

$$c_k = \frac{\alpha + t}{2} + r(k)$$

avec $\lim_{k\to\infty} r(k) = 0$.

$$c_k = \frac{\alpha}{2} + \frac{t}{\lambda_k^2} \log\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_k^2 + \mathcal{O}(\lambda_k^2)\right) = \frac{\alpha + t}{2} + \mathcal{O}(1) \ .$$

7. *Démontrer* (2)*.*

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\alpha = t = 1 + \varepsilon/2$. Les résultats précédents montrent que pour presque tout ω, il existe $k_0(\omega, \varepsilon) < \infty$ tel que

$$\frac{S_n(\omega)}{h(n)} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2} + r(k)$$

pour tout $k \geqslant k_0(\omega, \varepsilon)$ et $n \in]t^k, t^{k+1}]$. En prenant de plus k assez grand pour que $r(k) < \varepsilon/2$, on obtient $S_n/h(n) \leqslant 1 + \varepsilon$ pour tous les n assez grands, d'où le résultat.