Leçon 230. Probabilité conditionnelle, indépendance, variance, covariance

Exercices

Exercice 1. Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie on constate qu'il y a, parmi les malades, un vacciné pour 9 non vaccinés.

1. Les événements "avoir été vacciné" et "être tombé malade" sont-ils indépendants?
2. Au cours de l'épidémie, il y a eu un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle était la probablilité de tomber malade pour quelqu'un de non vacciné?

Exercice 2. Madame Soleil habite Nantes, où il pleut un jour sur deux. Les prévisions météo ont un taux de fiabilité de 2/3 (s'il pleut, il y a deux chances sur trois pour que la météo ait prédit de la pluie, de même s'il fait beau).
Madame Soleil emporte toujours son parapluie si la météo annonce de la pluie. Si la météo annonce du beau temps, elle emporte son parapluie une fois sur trois.
Calculer la probabilité

1. qu'elle soit surprise par la pluie sans parapluie (qu'elle n'ait pas son parapluie, sachant qu'il pleut);
2. qu'elle ait emporté son parapluie inutilement (qu'elle ait son parapluie, sachant qu'il fait beau).

Exercice 3. Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).
Déterminer

- la loi conjointe de X et Y,
- les lois (marginales) de X et Y, leur espérance et leur variance,
- la covariance de X et Y,
- la variance de $X + Y$.

Exercice 4. Dans un jeu télévisé, il y a 3 portes fermées; derrière l'une d'elles se trouve une luxueuse voiture, alors que chacune des deux autres cache une chèvre. Le candidat commence par choisir une porte, qui reste fermée. L'animateur ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat peut alors choisir entre

- maintenir son choix;
- choisir l'autre porte.

De toute manière, il remporte ce qui se trouve derrière la porte finalement choisie.
Sachant qu'il veut gagner la voiture, que lui conseillez-vous?

Rappel de théorie

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice* de X la fonction $G_X : \mathbb{C} \supset \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$G_X(z) = \mathbb{E}\big(z^X\big) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbb{P}\{X = k\} \; .$$

Exercices

Exercice 5. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes:

1. Loi de Bernoulli: $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - q$, $\mathbb{P}\{X = 1\} = q$, où $q \in [0, 1]$.
2. Loi binomiale: $\mathbb{P}\{X = k\} = b_{n,q}(k) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}$, pour $k = 0, 1, \dots, n$.
3. Loi de Poisson: $\mathbb{P}\{X = k\} = \pi_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \, \lambda^k / k!$, où $\lambda > 0$ et $k \in \mathbb{N}$.
4. Loi géométrique: $\mathbb{P}\{X = k\} = q(1 - q)^{k-1}$, où $q \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. On suppose que la série entière définissant G_X a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Montrer que

$$G_X(1) = 1 \; , \qquad G'_X(1) = \mathbb{E}(X) \; , \qquad G''_X(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \; ,$$

et en déduire une expression de la variance de X en termes de sa fonction génératrice. En déduire les espérances et variances de variables aléatoires de Bernoulli, binomiale, de Poisson et géométrique.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et de fonctions génératrices G_X et G_Y respectivement. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Application: Vérifier les assertions suivantes.

1. La somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes suit une loi binomiale;
2. La somme de deux variables aléatoires binomiales indépendantes de même paramètre q suit une loi binomiale;
3. La somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson suit une loi de Poisson.