Variables aléatoires

Référence :
Djalil Chafaï et Pierre-André Zitt, *Probabilités – Préparation à l'agrégation interne.*
Téléchargeable gratuitement sur HAL à l'adresse
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01374158

Lois discrètes usuelles

1. *Loi uniforme* sur $\{1,\ldots,n\}$: $X \sim \mathcal{U}_{\{1,\ldots,n\}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   Définition de la loi : $\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{n}$ pour $k \in \{1,\ldots,n\}$.
   $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$, $\mathbb{E}(z^X) = \frac{z+\cdots+z^n}{n} = \frac{z(1-z^n)}{n(1-z)}$.
   Exemple : résultat d'un dé non pipé ($n = 6$).

2. *Loi de Bernoulli* : $X \sim \mathcal{B}(1,p)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.
   Définition de la loi : $\mathbb{P}\{X = 1\} = p$, $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - p$.
   $\mathbb{E}(X) = p$, $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$, $\mathbb{E}(z^X) = pz + 1 - p$.
   Exemples : expérience de Bernoulli avec probabilité de succès p.
   Obtenir un 6 en lançant un dé ($p = \frac{1}{6}$).

3. *Loi binomiale* : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.
   Définition de la loi : $\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in \{0,\ldots,n\}$.
   $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$, $\mathbb{E}(z^X) = (pz + 1 - p)^n$.
   Exemple : nombre de succès dans une expérience de Bernoulli de longueur n avec probabilité de succès p.

4. *Loi géométrique* : $X \sim \mathcal{G}(p)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.
   Définition de la loi : $\mathbb{P}\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, $\mathbb{E}(z^X) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$.
   Exemple : premier succès dans une expérience de Bernoulli de longueur infinie avec probabilité de succès p.
   Propriété : $\mathbb{P}\{X > n + k | X > n\} = \mathbb{P}\{X > k\}$ (absence de mémoire ou Markov).

5. *Loi de Poisson* : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
   Définition de la loi : $\mathbb{P}\{X = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$, $\mathbb{E}(z^X) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$.
   Propriétés : Limite de la loi $\mathcal{B}(n,p_n)$ avec $np_n \to \lambda$ pour $n \to \infty$.
   La somme de deux v.a.r. indépendantes de lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

6. ☠ *Loi hypergéométrique* : $X \sim \mathcal{H}(N,n,K)$, $N \in \mathbb{N}$, $n, K \in \{0,\ldots,N\}$.
   Définition de la loi : $\mathbb{P}\{X = k\} = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
   pour $k \in \{\max\{0, n + K - N\}, \ldots, \min\{n,K\}\}$.
   $\mathbb{E}(X) = n\frac{K}{N}$, $\mathrm{Var}(X) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$,
   $\mathbb{E}(z^X)$ s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique.
   Exemple : nombre de succès lors de n tirages sans remise dans une urne avec N éléments dont K succès.

Lois à densité usuelles

1. *Loi uniforme* sur $[a,b]$: $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, $a < b \in \mathbb{R}$.
   Densité : $f_X(t) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$.
   $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, ta}}{\mathrm{i}\, t(b-a)}$.
   Exemple : aiguille de Buffon.
2. *Loi exponentielle* : $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
   Densité : $f_X(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{t>0}$.
   $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\, t}$.
   Propriétés : $\mathbb{P}\{X > t\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour $t \geqslant 0$.
   $\mathbb{P}\{X \geqslant t + s | X \geqslant t\} = \mathbb{P}\{X \geqslant s\}$ (absence de mémoire ou Markov).
3. *Loi normale ou gaussienne* : $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.
   Densité : $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)}$.
   $\mathbb{E}(X) = m$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, mt - \sigma^2 t^2/2}$.
   Propriétés : Théorème Central Limite.
   Une somme de v.a.r. gaussiennes suit une loi gaussienne.
4. *Loi Gamma* : $X \sim \gamma(p, \lambda)$, $p > 0$, $\lambda > 0$.
   Densité : $f_X(t) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} t^{p-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{t>0}$.
   $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\, t}\right)^p$.
   Propriété : Si $p \in \mathbb{N}^*$, loi de la somme de p v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
5. *Loi du Chi-deux* : $X \sim \chi^2(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   Densité : $f_X(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{n/2-1}\, \mathrm{e}^{-t/2}\, \mathbb{1}_{t>0}$.
   $\mathbb{E}(X) = n$, $\mathrm{Var}(X) = 2n$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = (1 - 2\,\mathrm{i}\, t)^{-n/2}$.
   Propriétés : Loi de la somme des carrés de n v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   Théorèmes de Fisher (variance empirique) et de Pearson (test d'adéquation à une loi).
6. *Loi de Cauchy* :
   Densité : $f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.
   Pas d'espérance, pas de variance. $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = \mathrm{e}^{-|t|}$.
   Propriété : Une somme de v.a.r. de Cauchy suit une loi de Cauchy.
   Exemple : Lieu de passage d'un mouvement Brownien 2D par une droite.
7. *Loi de Pareto* :
   Densité : $f_X(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha-1}}\mathbb{1}_{t>1}$, $\alpha > 0$.
   $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ si $\alpha > 1$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ si $\alpha > 2$,
   $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = \alpha(-\mathrm{i}\, t)^\alpha \Gamma(-\alpha, -\mathrm{i}\, t)$.
   Exemple : modélise certains événements à "queues lourdes" (tremblements de terre).

Rappels de théorie

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *variable aléatoire réelle* (v.a.r.) si elle est *mesurable* ($\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-mesurable), c-à-d si pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}$.
- Si Ω est un ensemble dénombrable et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable.
- Si $\Omega = \mathbb{R}$ et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est mesurable.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on définit sa *loi* par $\mathbb{P}\{X \in B\} = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$.
- La *fonction de répartition* de X est définie par $F_X(t) = \mathbb{P}\{X \leqslant t\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que F_X est *absolument continue* de densité f_X s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, d'intégrale 1, telle que

  $$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x) \, \mathrm{d}x \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

  Dans ce cas, on dit que f_X est la *densité* de (la loi de) X.
- Si Ω est dénombrable, alors son *espérance* est définie par l'une ou l'autre des deux expressions équivalentes

  $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) .$$

  Si Ω est infini, on demande que les séries convergent absolument. Pour une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit

  $$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(X(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) ,$$

  toujours à condition que les séries convergent absolument.
- Si X admet la densité f_X et que $|x| f_X(x)$ est intégrable, on définit l'*espérance* de X par

  $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x .$$

  On définit de manière analogue $\mathbb{E}(\varphi(X))$ pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|\varphi(x)| f_X(x)$ soit intégrable par l'intégrale de $\varphi(x) f_X(x)$.
- La *variance* de X est définie par $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$. La variance existe si et seulement si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, et alors elle est égale à $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Exercices

Exercice 1 (Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson)**.** On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \lambda/n)$ pour un $\lambda \in]0,1]$ fixé. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \mathbb{P}\{Y = k\}$$

où Y suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Exercice 2 (Propriété de Markov de la loi exponentielle)**.** Montrer que si X suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{P}\{X > x + t | X > x\} = \mathbb{P}\{X > t\} \qquad \forall x, t \geqslant 0 \ .$$

Exercice 3 (Fonction de comptage du processus de Poisson)**.** ☠
Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.) de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Pour $k = 1, \dots n$, on pose

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i \ , \qquad N_k(t) = \sum_{i=1}^{k} 1\!\!1_{\{X_i \leqslant t\}} \ .$$

1. Déterminer la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$.
   Que vaut $\mathbb{P}\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$?
2. Déterminer la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_{n-1})$ (marginale par rapport à X_n), puis la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_k)$ pour tout $k = 2, \dots, n-2$.
3. Déterminer la loi conjointe de $(X_2, \dots, X_k)$ (marginale par rapport à X_1), puis la loi conjointe de $(X_l, \dots, X_k)$ pour tout $l = 3, \dots, k-1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}\{N_n(t) = k\} = \mathbb{P}\{X_k \leqslant t, X_{k+1} > t\}$ pour $k = 1, \dots, n-1$.
5. Déterminer la loi de $N_n(t)$, puis celle de $\lim_{n\to\infty} N_n(t)$.