Préparation à l'agrégation interne Oréans–Tours

Variables aléatoires à densité

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans

Janvier 2021

Densité

Définition

On appelle densité une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Variable aléatoire à densité

Définition

Soit f une densité. On dit qu'une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X admet la densité f si

$$\mathbb{P}\{X \in I\} = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
La fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F_X(t) = \mathbb{P}\{X \in]-\infty, t]\} = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

s'appelle la fonction de répartition de X.

Variable aléatoire à densité

Exercice 1

1. Soit X une v.a.r. de densité f, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et strictement croissante. Soit Y une v.a.r. telle que $g(Y) = X$. Quelle est sa densité ?
2. Soit X une v.a.r. de densité f. Quelle est la densité de $Y = X^2$?

Espérance

Définition/Théorème (de transfert)

Soit X une v.a.r. de densité f. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| f(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

Alors on dit que la v.a.r. $\varphi(X)$ est intégrable. Son espérance est donnée par

$$\mathbb{E}\big[\varphi(X)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

Variance

Définition

Soit X une v.a.r. de densité f. Supposons X^2 intégrable. Alors la variance de X est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$

Espérance et variance

Exercice 2

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires de densité f suivantes :

1. $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, 1_{x \geqslant 0}$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$).
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ (loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$).

Notes

Fonction caractéristique

Définition

Soit X une v.a.r. de densité f. La fonction caractéristique de X est la fonction $\phi_X : D \to \mathbb{C}$, donnée par

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}\,zX}\big] := \mathbb{E}\big[\cos(zX)\big] + \mathrm{i}\,\mathbb{E}\big[\sin(zX)\big]$$

où $D \subset \mathbb{C}$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels les espérances existent.

Remarque : On a $\mathbb{R} \subset D$.

Fonction caractéristique

Exercice 3

Calculer les fonctions caractéristiques des variables aléatoires de densité f suivantes :

1. $f(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \, 1_{x \geqslant 0}$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$).
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (loi normale centrée réduite).

Notes

Rappels : intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème de continuité

Soient $\mathcal{X}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{X} \times I \to \mathbb{C}$.
On suppose que pour tout $y \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur $\mathcal{X}$ et que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux sur I.
S'il existe une fonction g intégrable sur I et telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $y \in I$, $|f(x,y)| \leqslant g(y)$, alors la fonction $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(x) = \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

est continue sur $\mathcal{X}$.

Rappels : intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème de dérivation

Soient $\mathcal{X}$ et I deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{X} \times I \to \mathbb{C}$ une fonction telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ soit intégrable sur I.

On suppose que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en tout point de $\mathcal{X} \times I$, et que pour tout $y \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue sur $\mathcal{X}$.

S'il existe une fonction h intégrable sur I et telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $y \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant h(y)$, alors la fonction $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(x) = \int_I f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

est dérivable sur $\mathcal{X}$ et on a

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}y\ .$$

Moments de variables à densité

Exercice 4

Soit ϕ_X la fonction caractéristique d'une v.a.r. X de densité f. Donner une condition pour que ϕ_X soit n fois dérivable en 0, et relier ces dérivées aux moments $\mathbb{E}[X^n]$ de X.

En déduire $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour les variables aléatoires de densité f suivantes :

1. $f(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \, 1_{x \geqslant 0}$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$).
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (loi normale centrée réduite).

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes