## Modélisation et probabilités discrètes – Corrigé partiel

**Exercice 1.** *Donner un univers $\Omega$ et une distribution de probabilité $p$ permettant de modéliser les expériences suivantes. Il peut y avoir plusieurs réponses possibles !*

1. *On lance une pièce de monnaie équilibrée.*
   Tout ensemble $\Omega$ à deux éléments convient. On peut par exemple le noter $\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}$, ou encore $\Omega = \{0, 1\}$.
   La distribution de probabilité est uniforme : $p(\mathrm{P}) = p(\mathrm{F}) = \frac{1}{2}$.

2. *On lance un dé équilibré ordinaire (ses faces sont numérotées de $1$ à $6$).*
   Le choix canonique est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec la distribution de probabilité uniforme : $p(\omega) = \frac{1}{6}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

3. *On lance un dé équilibré ayant $4$ faces rouges et $2$ faces bleues.*
   Une première possibilité : $\Omega = \{\mathrm{R}, \mathrm{B}\}$ avec $p(\mathrm{R}) = \frac{2}{3}$ et $p(\mathrm{B}) = \frac{1}{3}$.
   On aurait aussi pu choisir $\Omega = \{\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3, \mathrm{R}_4, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2\}$ avec la distribution uniforme. Ce choix indique que les six faces du dé sont considérées distinguables.

4. *On lance deux pièces de monnaie équilibrées.*
   Le meilleur choix est de prendre $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$, avec la distribution de probabilité uniforme : $p(\omega) = \frac{1}{4}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   Pour des pièces indistinguables, on aurait pu préférer choisir $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{FF}, \mathrm{Diff}\}$, où Diff est l'éventualité « les deux pièces montrent des faces différentes ». Dans ce cas il convient de prendre $p(\mathrm{Diff}) = \frac{1}{2}$, alors que $p(\mathrm{PP}) = p(\mathrm{FF}) = \frac{1}{4}$.

   **Remarque :** Le premier choix correspond à utiliser l'espace produit de deux copies de l'espace de la question 1. Si $(\Omega_1, p_1)$ et $(\Omega_2, p_2)$ sont deux espaces de probabilité discrets, leur produit est défini comme l'espace $(\Omega, p)$ avec

   $$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad \text{et} \qquad p((\omega_1, \omega_2)) = p_1(\omega_1) p_2(\omega_2) \ .$$

5. *On lance un dé équilibré de manière répétée jusqu'à ce qu'on obtienne le premier $6$.*
   Un choix qui peut paraître naturel est l'espace produit d'une infinité de copies de l'espace de la question 2. Cela revient à prendre

   $$\Omega = \left\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \colon \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ \forall i \in \mathbb{N}^*\right\} \ .$$

   Autrement dit, $\Omega$ est l'ensemble des suites infinies d'entiers compris entre $1$ et $6$, qu'on note parfois $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{\mathbb{N}^*}$. Le problème de cette construction est que tous les éléments de $\Omega$ ont une probabilité nulle !
   On peut contourner cette difficulté dans le cas présent en définissant simplement $\Omega = \mathbb{N}^*$, où $\omega$ représente l'éventualité « le premier $6$ est obtenu lors du jet numéro $\omega$ ». Il convient alors de prendre pour distribution de probabilité

   $$p(\omega) = \left(\frac{5}{6}\right)^{\omega - 1} \left(\frac{1}{6}\right) \quad \forall \omega \in \mathbb{N}^* \ , \tag{1}$$

   puisque l'éventualité $\omega$ est réalisée si et seulement si les $\omega - 1$ premiers jets ne donnent pas $6$, et le jet $\omega$ donne $6$.

6. *Une urne contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. On tire 2 boules avec remise.*
   Il suffit de prendre le produit de deux copies de l'espace probabilisé $(\mathrm{R}, \mathrm{B})$ avec $p(\mathrm{R}) = \frac{2}{5}$ et $p(\mathrm{B}) = \frac{3}{5}$. On a donc $\Omega = \{\mathrm{R}, \mathrm{B}\}^2$, avec
   $$p((\mathrm{R},\mathrm{R})) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}\,, \qquad p((\mathrm{R},\mathrm{B})) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25}\,,$$
   $$p((\mathrm{B},\mathrm{R})) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{25}\,, \qquad p((\mathrm{B},\mathrm{B})) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25}\,.$$

7. *On tire deux boules de la même urne qu'à la question précédente, mais cette fois sans remise.*
   On prend à nouveau $\Omega = \{\mathrm{R}, \mathrm{B}\}^2$. Toutefois, contrairement à la question précédente, les deux tirages ne sont plus indépendants. En tenant compte de l'effet du premier tirage sur le suivant, on obtient
   $$p((\mathrm{R},\mathrm{R})) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}\,, \qquad p((\mathrm{R},\mathrm{B})) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}\,,$$
   $$p((\mathrm{B},\mathrm{R})) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}\,, \qquad p((\mathrm{B},\mathrm{B})) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}\,.$$
   Le calcul fait intervenir des probabilités conditionnelles. Par exemple le facteur $\frac{1}{4}$ intervenant dans le calcul de $p((\mathrm{R},\mathrm{R}))$ est la probabilité conditionnelle de tirer une boule rouge lors du second tirage, sachant que l'on en a déjà tiré une lors du premier tirage.

**Exercice 2.** *Déterminer la probabilité des événements suivants.*

1. *Une pièce équilibrée tombe sur Pile.*
   $\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}$ avec la distribution uniforme.
   $A = \{\mathrm{P}\}$, $\mathbb{P}(A) = p(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}$.
2. *On lance un dé équilibré. Le résultat est pair.*
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec la distribution uniforme.
   $B = \{2, 4, 6\}$, $\mathbb{P}(B) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{2}$.
3. *La somme des points obtenus en lançant deux dés équilibrés est égale à* $8$.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ avec la distribution uniforme : $p(\omega) = \frac{1}{36}$ pour tout $\omega$ dans $\Omega$.
   C'est le produit de deux copies de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec la distribution uniforme.
   $C = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$,
   $\mathbb{P}(C) = p((2, 6)) + p((3, 5)) + p((4, 4)) + p((5, 3)) + p((6, 2)) = \frac{5}{36}$.
4. *En jetant deux pièces de monnaie équilibrées, aucune ne tombe sur Pile.*
   $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$ avec la distribution uniforme, que l'on peut identifier avec $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^2$.
   $D = \{\mathrm{FF}\}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{4}$.

5. *En jetant deux pièces de monnaie équilibrées, les deux ne tombent pas à la fois sur Face.*
   Même $\Omega$ qu'à la question précédente.
   $E = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}\} = \Omega \setminus D$, $\mathbb{P}(E) = \frac{3}{4} = 1 - \mathbb{P}(D)$.
6. *En lançant de manière répétée un dé équilibré, on obtient* $6$ *pour la première fois lors du troisième jet.*
   Comme seulement les trois premiers jets importent, il est permis de choisir $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$ avec la probabilité uniforme. Dans ce cas
   $F = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \colon \omega_1, \omega_2 \neq 6, \omega_3 = 6\}$, $\mathbb{P}(F) = \mathrm{Card}(F)\frac{1}{6^3} = \frac{25}{216}$.
   Une autre possibilité est de travailler, comme à la question 5 de l'exercice 1, avec $\Omega = \mathbb{N}^*$ et la distribution de probabilité (1). Alors
   $F = \{3\}$, $\mathbb{P}(F) = p(3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}$.
7. *Une urne contient* $3$ *boules bleues et* $2$ *boules rouges. On tire* $2$ *boules avec remise. Aucune des deux n'est bleue.*
   Même $(\Omega, p)$ qu'à l'exercice 1, question 6.
   $G = \{(\mathrm{R}, \mathrm{R})\}$, $\mathbb{P}(G) = p((\mathrm{R}, \mathrm{R})) = \frac{4}{25}$.
8. *Une urne contient* $3$ *boules bleues et* $2$ *boules rouges. On tire* $2$ *boules avec remise. Au moins l'une des deux est bleue.*
   Même $(\Omega, p)$ qu'à l'exercice 1, question 6.
   $H = \{(\mathrm{R}, \mathrm{B}), (\mathrm{B}, \mathrm{R}), (\mathrm{B}, \mathrm{B})\} = \Omega \setminus G$, $\mathbb{P}(H) = \frac{21}{25} = 1 - \mathbb{P}(G)$.
9. *Une urne contient* $3$ *boules bleues et* $2$ *boules rouges. On tire* $2$ *boules sans remise. Les deux boules tirées sont bleues.*
   Même $(\Omega, p)$ qu'à l'exercice 1, question 7.
   $I = \{(\mathrm{B}, \mathrm{B})\}$, $\mathbb{P}(I) = p((\mathrm{B}, \mathrm{B})) = \frac{3}{10}$.

**Exercice 3.** *Si* $\Omega$ *est fini, combien admet-il d'événements différents ?*

Pour obtenir un sous-ensemble de $\Omega$ il faut décider, pour chaque $\omega \in \Omega$, si on l'inclut dans ce sous-ensemble ou pas. Il existe donc $2^{\mathrm{Card}(\Omega)}$ événements.

**Exercice 4.** *Déterminer l'image et la loi des variables aléatoires suivantes.*

1. $X$ *est le nombre de points obtenus en jetant un dé équilibré.*
   $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{1}{6}$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
   On dit que $X$ suit la *loi uniforme* sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. $X$ *est la somme des points obtenus en jetant deux dés équilibrés.*
   $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$.
   Un raisonnement analogue à celui de l'exercice 2, question 3 montre que
   $\mathbb{P}\{X = 2\} = \frac{1}{36} = \mathbb{P}\{X = 12\}$,
   $\mathbb{P}\{X = 3\} = \frac{2}{36} = \mathbb{P}\{X = 11\}$,
   $\mathbb{P}\{X = 4\} = \frac{3}{36} = \mathbb{P}\{X = 10\}$,

$\mathbb{P}\{X=5\} = \frac{4}{36} = \mathbb{P}\{X=9\}$,
$\mathbb{P}\{X=6\} = \frac{5}{36} = \mathbb{P}\{X=8\}$,
$\mathbb{P}\{X=7\} = \frac{6}{36}$.

3. *On jette $3$ dés équilibrés ayant chacun $4$ faces rouges et $2$ faces bleues. $X$ est le nombre de dés montrant une face rouge.*
   $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
   Pour déterminer la loi de $X$, travaillons avec l'espace produit de trois copies de l'espace probabilisé de l'exercice 1, question 3 (1er choix). Alors
   $\mathbb{P}\{X=0\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{B})\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$,
   $\mathbb{P}\{X=1\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{R},\mathrm{B},\mathrm{B}),(\mathrm{B},\mathrm{R},\mathrm{B}),(\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{R})\}) = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$,
   $\mathbb{P}\{X=2\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{R},\mathrm{R},\mathrm{B}),(\mathrm{R},\mathrm{B},\mathrm{R}),(\mathrm{B},\mathrm{R},\mathrm{R})\}) = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{12}{27}$,
   $\mathbb{P}\{X=3\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{R},\mathrm{R},\mathrm{R})\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.
   On dit que $X$ suit une *loi binomiale* de paramètres $(3,\frac{2}{3})$.

4. *On jette $3$ pièces de monnaie équilibrées. $X$ est le nombre de Pile obtenu.*
   $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
   Selon le même principe qu'à la question précédente,
   $\mathbb{P}\{X=0\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{F},\mathrm{F},\mathrm{F})\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$,
   $\mathbb{P}\{X=1\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{F},\mathrm{F}),(\mathrm{F},\mathrm{P},\mathrm{F}),(\mathrm{F},\mathrm{F},\mathrm{P})\}) = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$,
   $\mathbb{P}\{X=2\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{F}),(\mathrm{P},\mathrm{F},\mathrm{P}),(\mathrm{F},\mathrm{P},\mathrm{P})\}) = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$,
   $\mathbb{P}\{X=3\} = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{P})\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
   On dit que $X$ suit une *loi binomiale* de paramètres $(3,\frac{1}{2})$.

5. *$X$ est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne $6$ pour la première fois.*
   $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   En travaillant avec $\Omega = \mathbb{N}^*$ comme à la question 5 de l'exercice 1, on a $X(\omega) = \omega$, donc
   $\mathbb{P}\{X=x\} = p(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\frac{1}{6}$.
   On dit que $X$ suit une *loi géométrique* de paramètre $\frac{1}{6}$.