Modélisation et probabilités discrètes

Espace probabilisé discret

Un *espace probabilisé discret* est défini par la donnée

1. d'un ensemble non vide Ω, appelé *univers*, qui est fini ou éventuellement infini dénombrable; c'est l'ensemble des *éventualités* que l'on souhaite distinguer;
2. d'une *distribution de probabilité* sur Ω, c'est-à-dire d'une fonction $p : \Omega \to [0, 1]$ satisfaisant
$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

La notion de tribu n'est pas essentielle à ce stade, nous la verrons un peu plus loin.

Exercice 1. Donner un univers Ω et une distribution de probabilité p permettant de modéliser les expériences suivantes. Il peut y avoir plusieurs réponses possibles !

1. On lance une pièce de monnaie équilibrée.
2. On lance un dé équilibré ordinaire (ses faces sont numérotées de 1 à 6).
3. On lance un dé équilibré ayant 4 faces rouges et 2 faces bleues.
4. On lance deux pièces de monnaie équilibrées.
5. On lance un dé équilibré de manière répétée jusqu'à ce qu'on obtienne le premier 6.
6. Une urne contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. On tire 2 boules avec remise.
7. On tire deux boules de la même urne qu'à la question précédente, mais cette fois sans remise.

Événements et tribus

On appelle *événement* tout sous-ensemble $A \subset \Omega$ de l'univers.
L'ensemble des événements constitue la *tribu* associée à Ω. On la note en général $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{A}$.
Les opérations logiques de base sur les événements correspondent à des opérations de théorie des ensembles.

- l'ensemble vide $\emptyset$ est appelé *l'événement impossible*;
- l'univers Ω est appelé *l'événement certain*;
- si A et B sont deux événements, alors $A \cap B$ dénote l'événement "A et B";
- si A et B sont deux événements, alors $A \cup B$ dénote l'événement "A ou B";

- si A est un événement, alors $A^c = \Omega \setminus A$ dénote l'événement "non A";
- si $A \subset B$, alors on dit que "A implique B".
- si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *incompatibles*.

La *probabilité de l'événement* A est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

avec la convention que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Exercice 2. Déterminer la probabilité des événements suivants.

1. Une pièce équilibrée tombe sur Pile.
2. On lance un dé équilibré. Le résultat est pair.
3. La somme des points obtenus en lançant deux dés équilibrés est égale à 8.
4. En jetant deux pièces de monnaie équilibrées, aucune ne tombe sur Pile.
5. En jetant deux pièces de monnaie équilibrées, les deux ne tombent pas à la fois sur Face.
6. En lançant de manière répétée un dé équilibré, on obtient 6 pour la première fois lors du troisième jet.
7. Une urne contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. On tire 2 boules avec remise. Aucune des deux n'est bleue.
8. Une urne contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. On tire 2 boules avec remise. Au moins l'une des deux est bleue.
9. Une urne contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. On tire 2 boules sans remise. Les deux boules tirées sont bleues.

Exercice 3. Si Ω est fini, combien admet-il d'événements différents ?

Variables aléatoires

Une *variable aléatoire réelle* (v.a.r.) sur un espace probabilisé discret (Ω, p) est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Son *image* est

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$$

La *loi* d'une v.a.r. associe à chaque $x \in X(\Omega)$ la probabilité que X soit égale à x :

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}(\{\omega \colon X(\omega) = x\}) = \sum_{\omega \colon X(\omega) = x} p(\omega)$$

Exercice 4. Déterminer l'image et la loi des variables aléatoires suivantes.

1. X est le nombre de points obtenus en jetant un dé équilibré.
2. X est la somme des points obtenus en jetant deux dés équilibrés.
3. On jette 3 dés équilibrés ayant chacun 4 faces rouges et 2 faces bleues. X est le nombre de dés montrant une face rouge.
4. On jette 3 pièces de monnaie équilibrées. X est le nombre de Pile obtenu.
5. X est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne 6 pour la première fois.

Espérance

L'espérance d'une v.a.r. X sur un espace probabilisé discret (Ω, p) est définie à condition que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$$

(c'est toujours le cas si Ω est fini).
Sous cette condition, on définit l'*espérance* de X par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}\{X = x\}$$

Cette définition est équivalente à

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Exercice 5. ☠
Démontrer l'équivalence des deux définitions de l'espérance.

Exercice 6. Déterminer l'espérance des variables aléatoires suivantes.

1. X est le nombre de points obtenus en jetant un dé équilibré.
2. X est la somme des points obtenus en jetant deux dés équilibrés.
3. On jette 3 dés ayant chacun 4 faces rouges et 2 faces bleues. X est le nombre de dés montrant une face rouge.
4. On jette 3 pièces de monnaie équilibrées. X est le nombre de Pile obtenu.
5. ☠ X est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne 6 pour la première fois.

Variance

La *variance* d'une v.a.r. X sur un espace probabilisé discret (Ω, p) est définie par

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X)]^2\big)$$

Elle peut éventuellement être infinie si Ω est infini.

Exercice 7.

1. Montrer que
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$
2. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors
$$\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$$
3. Montrer que $\operatorname{Var}(X) = 0$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\{X = c\} = 1$, et qu'alors on a nécessairement $c = \mathbb{E}(X)$.

Exercice 8. Déterminer les variances des variables aléatoires suivantes.

1. On jette un dé équilibré ayant 4 faces rouges et 2 faces bleues. X vaut 1 si on obtient une face rouge, 0 sinon.
2. On jette 3 pièces de monnaie équilibrées. X est le nombre de Pile obtenu.
3. X est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne 6 pour la première fois.

Loi conjointe, marginales, covariance

Soient X et Y deux v.a.r. sur un espace probabilisé discret (Ω, p). La *loi conjointe* de X et Y associe à tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ la valeur

$$\mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\})) = \mathbb{P}\{X = x, Y = y\}$$

(la virgule signifiant "et").
La *loi marginale de X* est déterminée par

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\{X = x, Y = y\}$$

et la *loi marginale de Y* est définie de manière analogue.
La *covariance* de X et Y est défine par

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big)$$

Exercice 9. ☠

1. Montrer que
$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
2. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors
$$\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X,Y)$$
3. Montrer que
$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

Exercice 10. Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, dont les faces sont numérotées de 1 à 4, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).

1. Spécifier un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience.
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y, leurs lois marginales ainsi que leurs espérances.
3. Déterminer la convariance de X et de Y ainsi que la variance de $X + Y$.