# Loi binomiale et loi de Poisson

### Rappels de théorie

1. On dit que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$ et on écrit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{pour } k \in \{0, \dots, n\}.$$

   Dans ce cas on a $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$, $\mathbb{E}(z^X) = (pz + 1 - p)^n$.

   Si $n = 1$, on dit que $X$ suit une loi de Bernoulli.

2. On dit que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on écrit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}.$$

   Dans ce cas on a $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$, $\mathbb{E}(z^X) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$.

### Exercice 1

Soit $(p_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres dans $[0,1]$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0 \; .$$

On suppose que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \mathbb{P}\{Y = k\}$$

où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On pourra poser $\lambda_n = np_n$.

### Exercice 2

1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, avec $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m, p)$.

2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

**Exercice 3** ☠

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in ]0,1[$. On se donne des espaces probabilisés discrets $(\Omega_i, p_i)$, pour $i = 1, \dots, n$, définis par $\Omega_i = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ et

$$p_i(\omega_i) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-q} - (1-q) & \text{si } \omega_i = -1 \;, \\ 1-q & \text{si } \omega_i = 0 \;, \\ \mathrm{e}^{-q} \dfrac{q^{\omega_i}}{\omega_i!} & \text{si } \omega_i \geqslant 1 \;. \end{cases}$$

Sur chaque $\Omega_i$, on introduit les deux variables aléatoires

$$X_i(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_i = 0 \;, \\ 1 & \text{sinon} \;, \end{cases} \qquad Y_i(\omega_i) = \begin{cases} \omega_i & \text{si } \omega_i \geqslant 1 \;, \\ 0 & \text{sinon} \;. \end{cases}$$

1. Vérifier que $(\Omega_i, p_i)$ est bien un espace probabilisé discret.

2. Quelle est la loi de $X_i$ ? Quelle est la loi de $Y_i$ ?

3. Montrer que
$$\mathbb{P}\{X_i \neq Y_i\} = q(1 - \mathrm{e}^{-q}) \leqslant q^2 \;.$$

4. Soit $(\Omega, p)$ l'espace produit des $(\Omega_i, p_i)$. On rappelle que cela signifie que $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ et
$$p((\omega_1, \dots, \omega_n)) = p_1(\omega_1) \dots p_n(\omega_n) \;.$$
Quelle est la loi de $X = X_1 + \dots + X_n$ ? Quelle est la loi de $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ ?

5. Montrer que
$$\mathbb{P}\{X \neq Y\} \leqslant nq^2 \;.$$

6. ☠ Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{\infty} \bigl| \mathbb{P}\{X = k\} - \mathbb{P}\{Y = k\} \bigr| \leqslant 2\mathbb{P}\{X \neq Y\} \;.$$
On pourra se servir de l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} \colon \mathbb{P}\{X = k\} > \mathbb{P}\{Y = k\}\}$.

7. En déduire que si $X \sim \mathcal{B}(n, q_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}(nq_n)$, alors
$$\sum_{k=0}^{\infty} \bigl| \mathbb{P}\{X = k\} - \mathbb{P}\{Y = k\} \bigr| \leqslant nq_n^2 \;.$$
Que peut-on en conclure si $\lim_{n\to\infty} nq_n = \lambda > 0$ ?