Introduction aux probabilités

Référence :
Djalil Chafaï et Pierre-André Zitt, *Probabilités – Préparation à l'agrégation interne*.
Téléchargeable gratuitement sur HAL à l'adresse
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01374158

L'expérience de Bernoulli

Une *expérience de Bernoulli élémentaire* est une expérience qui a deux issues possibles: le succès, qui a lieu avec probabilité $p \in [0,1]$, et l'échec, qui a lieu avec probabilité $1-p$.

Exemples :

- jet d'une pièce équilibrée, succès si on obtient Pile, $p = \frac{1}{2}$;
- jet d'un dé non pipé, succès si on obtient 6, $p = \frac{1}{6}$;
- participation à une loterie, $p = 1/$beaucoup.

Une *expérience de Bernoulli de longueur* $n \in \mathbb{N}^*$ consiste à répéter n expériences de Bernoulli élémentaires *indépendantes*. Cela signifie intuitivement que chacune des n expériences est un succès avec probabilité p, quel que soit les résultat des autres expériences.

Modélisation probabiliste

L'expérience de Bernoulli élémentaire peut être décrite par le triplet $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ où

- $\Omega_1 = \{0,1\}$ est l'*univers*, 0 correspond à l'échec, et 1 correspond au succès;
- $\mathscr{F}_1 = \mathscr{P}(\Omega_1) = \{\{1\}, \{0\}, \Omega_1, \varnothing\}$ est l'ensemble des événements possibles, c'est la *tribu* de l'expérience aléatoire;
- $\mathbb{P}_1$ associe à tout événement $A \in \mathscr{F}$ sa probabilité $\mathbb{P}_1(A)$, définie par
$$\mathbb{P}_1(\{1\}) = p\ , \quad \mathbb{P}_1(\{0\}) = 1-p\ , \quad \mathbb{P}_1(\Omega_1) = 1\ , \quad \mathbb{P}_1(\varnothing) = 0\ .$$

L'expérience de Bernoulli de longueur n peut être décrite par le triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ où

- l'univers $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ est le produit cartésien de n copies Ω_i de Ω_1;
- la tribu est $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$;
- si A est un événement de la forme $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ avec $A_i \subset \Omega_i$ pour tout i, alors
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2)\cdots\mathbb{P}_n(A_n)\ .$$
- si $A \subset \Omega$ est un événement quelconque, alors $\mathbb{P}(A)$ peut être calculée en appliquant autant de fois que nécessaire la règle
$$A_1 \cap A_2 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)\ .$$

Exercice 1. On lance 3 fois une pièce de monnaie équilibrée. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. On obtient 3 fois Pile.
2. On obtient Pile au premier jet, puis 2 fois Face.
3. On obtient 1 Pile et 2 Face (dans n'importe quel ordre).

Mêmes questions lorsqu'on lance 3 fois un dé non pipé, en remplaąnt Pile par 6 et Face par tout résultat entre 1 et 5.

Exercice 2. Soit une expérience de Bernoulli de longueur n et de probabilité de succès p. Calculer, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, la probabilité d'obtenir k succès.

Exercice 3. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Calculer la probabilité que le premier Pile soit obtenu lors du $k$ième jet.
2. Décrire la situation lorsque $n \to \infty$.
3. Même questions dans le cadre d'une expérience de Bernoulli de longueur n et de probabilité de succès p : donner la probabilité que le premier succès ait lieu lors de la $k$ième expérience.

Variables aléatoires

Les exercices précédents donnent des exemples de variables aléatoires. Une *variable aléatoire* associe un nombre réel à toute issue d'une expérience aléatoire, c'est donc une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. **Exemples :** X est le nombre de Pile obtenus, X est le numéro du jet donnant le premier Pile.
La *loi* d'une variable aléatoire associe à toute valeur x de X la probabilité d'obtenir cette valeur. On la note $\mathbb{P}\{X = x\}$. Autrement dit,

$$\forall x \in X(\Omega) , \qquad \mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x\}\big) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(x)\big) .$$

Lois discrètes usuelles

- *Loi de Bernoulli* $\mathscr{B}(1, p)$ *:* $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - p$, $\mathbb{P}\{X = 1\} = p$.
  X représente le nombre de succès dans une expérience de Bernoulli élémentaire.
- *Loi binomiale* $\mathscr{B}(n, p)$ *:* $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
  X est le nombre de succès d'une expérience de Bernoulli de longueur n.
- *Loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$ *:* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\{X = k\} = p(1 - p)^{k-1}$.
  X est le numéro du premier succès d'une expérience de Bernoulli de longueur infinie.
- *Loi uniforme* $\mathscr{U}_{\{1,\dots,n\}}$ *:* $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}\{X = k\} = 1/n$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
- *Loi de Poisson* $\mathscr{P}(\lambda)$ *(*$\lambda > 0$*) :* $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\{X = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Exercice 4 (Propriété de Markov de la loi géométrique)**.** Pour $A, B \in \mathscr{F}$, on note $\mathbb{P}\{A|B\} = \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$ la probabilité de A sachant B.
Montrer que si X suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors

$$\mathbb{P}\{X > n+k | X > n\} = \mathbb{P}\{X > k\} \qquad \forall k, n \in \mathbb{N} .$$

Que signifie ce résultat pour un jeu de hasard (Pile ou Face, loterie, ...) ?

Exercice 5 (Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson)**.** On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \lambda/n)$ pour un $\lambda \in]0,1]$ fixé. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \mathbb{P}\{Y = k\}$$

où Y suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Variables aléatoires à densité

Une *densité* est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, vérifiant

$$f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 .$$

Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathscr{F}$ la plus petite tribu contenant tous les intervalles $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Cette tribu s'appelle la *tribu des boréliens* et est notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Sur $(\Omega, \mathscr{F})$ on définit une mesure de probabilité par

$$\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}\{X \in A\} = \mathbb{P}(A)$ pour tout borélien $A \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ est appelée *variable aléatoire à densité* f.

Lois à densité usuelles

- *Loi uniforme* $\mathscr{U}_{[a,b]}$ *:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

- *Loi normale* $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ (avec $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} .$$

- *Loi exponentielle* $\mathscr{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$) :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Le *théorème de de Moivre–Laplace* affirme que si X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors

$$\hat{X}_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

satisfait pour tout $[a,b] \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\hat{X}_n \in [a,b]\} = \mathbb{P}\{Y \in [a,b]\}$$

où Y suit une loi normale standard $\mathscr{N}(0,1)$. C'est un cas particulier du *théorème central limite*.

Exercice 6 (Propriété de Markov de la loi exponentielle)**.** Montrer que si X suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{P}\{X > x+t | X > x\} = \mathbb{P}\{X > t\} \qquad \forall x, t \geqslant 0 \ .$$

Vecteurs aléatoires

Un *vecteur aléatoire* est un n-uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires. Si

$$\mathbb{P}\{(X_1,\dots,X_n) \in [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]\} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

pour tout choix d'intervalles $[a_1,b_1],\dots,[a_n,b_n]$, on dit que f est la *densité* de X. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ de f par rapport à x_i est la *$i$ème marginale* de f. Si les X_i sont indépendantes de densité f_i, alors $f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1)\dots f_n(x_n)$.

Exercice 7 (Fonction de comptage du processus de Poisson)**.**
Soient $Z_1,\dots,Z_n$ des variables indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.) de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Pour $k = 1, \dots n$, on pose

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i \ , \qquad N_k(t) = \sum_{i=1}^{k} 1_{\{X_i \leqslant t\}} \ .$$

1. Déterminer la loi conjointe de $(X_1,\dots,X_n)$.
   Que vaut $\mathbb{P}\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$?
2. Déterminer la loi conjointe de $(X_1,\dots,X_{n-1})$ (marginale par rapport à X_n), puis la loi conjointe de $(X_1,\dots,X_k)$ pour tout $k = 2,\dots,n-2$.
3. Déterminer la loi conjointe de $(X_2,\dots,X_k)$ (marginale par rapport à X_1), puis la loi conjointe de $(X_l,\dots,X_k)$ pour tout $l = 3,\dots,k-1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}\{N_n(t) = k\} = \mathbb{P}\{X_k \leqslant t, X_{k+1} > t\}$ pour $k = 1,\dots,n-1$.
5. Déterminer la loi de $N_n(t)$, puis celle de $\lim_{n\to\infty} N_n(t)$.